

Συστήματα τύπων (i)

- **Ορισμός:** Συντακτικές μέθοδοι πολυωνυμικού χρόνου για την ταξινόμηση των τμημάτων ενός προγράμματος ανάλογα με τις τιμές που αυτά υπολογίζουν, με σκοπό να αποδείξουν την απουσία ορισμένων ανεπιθύμητων συμπεριφορών κατά την εκτέλεσή του (Benjamin Pierce, *Types and Programming Languages*, 2002)
- **Θεωρία τύπων:** κλάδος των μαθηματικών, της λογικής και της φιλοσοφίας
- **Ισομορφισμός Curry-Howard:** αντιστοιχία μεταξύ θεωρίας τύπων και θεωρίας αποδείξεων

Συστήματα τύπων (ii)

- Ιδιότητες που απορρέουν από αυτόν τον ορισμό
 - Έμφαση στις γλώσσες προγραμματισμού
 - Στατική προσέγγιση της συμπεριφοράς εκτέλεσης των προγραμμάτων
 - Συντηρητική αντιμετώπιση ανεπιθύμητων συμπεριφορών
- if συνθήκη then 42 else σφάλμα
- Σφάλματα τύπων κατά την εκτέλεση (run-time type errors)
- Ασφάλεια μιας γλώσσας προγραμματισμού \Leftrightarrow Συνέπεια του συστήματος τύπων

Βασικοί τύποι (i)

- **Σύνταξη** (εκφράσεις)
$$e ::= n \mid -e \mid e_1 + e_2 \mid \dots$$
$$\mid true \mid false \mid \neg e \mid e_1 \wedge e_2 \mid \dots$$
$$\mid e_1 < e_2 \mid \text{if } e \text{ then } e_1 \text{ else } e_2 \mid \dots$$
- **Λειτουργική σημασιολογία** (operational semantics)
 - Σχέση μετάβασης $s \longrightarrow s'$ μεταξύ καταστάσεων μιας αφηρημένης μηχανής
 - Για την παραπάνω γλώσσα εκφράσεων:

$$s ::= e$$

Βασικοί τύποι (ii)

- **Αποτίμηση**
$$\text{if } true \text{ then } (15 + 27) \text{ else } (3 + 4)$$
$$\longrightarrow 15 + 27 \longrightarrow 42$$
 - με ποια σειρά γίνονται οι πράξεις;
 - πότε σταματά η αποτίμηση;
- **Τιμές**
$$v ::= n \mid true \mid false$$

Βασικοί τύποι (iii)

- **Σημασία τελεστών**
 - Αν \diamond κάποιος τελεστής με ένα τελούμενο, τότε $\llbracket \diamond \rrbracket : v \rightarrow v$ είναι η σημασία του
π.χ. $\llbracket \neg \rrbracket (true) = false$
 - Αν \circ κάποιος τελεστής με δύο τελούμενα, τότε $\llbracket \circ \rrbracket : v \times v \rightarrow v$ είναι η σημασία του
π.χ. $\llbracket + \rrbracket (15, 27) = 42$

Βασικοί τύποι (iv)

- **Λειτουργική σημασιολογία**

$$v \circ v \longrightarrow \llbracket \circ \rrbracket (v_1, v_2) \quad \text{if } true \text{ then } e_1 \text{ else } e_2 \longrightarrow e_1$$
$$\text{if } false \text{ then } e_1 \text{ else } e_2 \longrightarrow e_2$$

$$\frac{e \longrightarrow e'}{v \circ e \longrightarrow v \circ e'}$$
$$\frac{e_1 \longrightarrow e'_1 \quad e_2 \longrightarrow e'_2}{e_1 \circ e_2 \longrightarrow e'_1 \circ e'_2}$$
$$\frac{e \longrightarrow e'}{\text{if } e \text{ then } e_1 \text{ else } e_2 \longrightarrow \text{if } e' \text{ then } e_1 \text{ else } e_2}$$

Βασικοί τύποι

(v)

- Λειτουργική σημασιολογία (συνέχεια)
 - Θεώρημα ντετερμινιστικής αποτίμησης:
Αν $e \rightarrow e'$ και $e \rightarrow e''$ τότε $e' \equiv e''$
 - Ορισμός: e είναι κανονική μορφή όταν δεν υπάρχει e' τέτοια ώστε $e \rightarrow e'$
 - Θεώρημα: κάθε τιμή είναι κανονική μορφή
 - Όχι αντιστροφή! if 1 then true else false
 - Ορισμός: e είναι κολλημένη αν είναι κανονική μορφή χωρίς να είναι τιμή

Βασικοί τύποι

(vi)

- Λειτουργική σημασιολογία (συνέχεια)
 - Ορισμός: \rightarrow^* είναι το ανακλαστικό και μεταβατικό κλείσιμο της \rightarrow
 - Θεώρημα μοναδικότητας κανονικών μορφών:
Αν $e \rightarrow^* u$ και $e \rightarrow^* u'$, όπου u, u' κανονικές μορφές, τότε $u \equiv u'$
 - Θεώρημα κανονικοποίησης (normalization) ή τερματισμού: για κάθε e υπάρχει κανονική μορφή u τέτοια ώστε $e \rightarrow^* u$
- Σκοπός συστήματος τύπων: αποφυγή κολλημένων εκφράσεων

Βασικοί τύποι

(vii)

- Σύνταξη (τύποι)

$\tau ::= \text{Int} \mid \text{Bool}$

- Κανόνες τύπων

$e : \tau$

$n : \text{Int} \quad \text{true} : \text{Bool} \quad \text{false} : \text{Bool}$

$\frac{e_1 : \text{Int} \quad e_2 : \text{Int}}{e_1 + e_2 : \text{Int}} \quad \frac{e_1 : \text{Int} \quad e_2 : \text{Int}}{e_1 < e_2 : \text{Bool}}$

$\frac{e : \text{Int}}{-e : \text{Int}} \quad \frac{e_1 : \text{Bool} \quad e_2 : \text{Bool}}{e_1 \wedge e_2 : \text{Bool}}$

$\frac{e : \text{Bool}}{\neg e : \text{Bool}} \quad \frac{e : \text{Bool} \quad e_1 : \tau \quad e_2 : \tau}{\text{if } e \text{ then } e_1 \text{ else } e_2 : \tau}$

Βασικοί τύποι

(viii)

- Παραγωγές τύπων (typing derivations)

$$\frac{\frac{\text{true} : \text{Bool} \quad \frac{15 : \text{Int} \quad 27 : \text{Int}}{15 + 27 : \text{Int}} \quad \frac{3 : \text{Int} \quad 4 : \text{Int}}{3 + 4 : \text{Int}}}{\text{if true then } (15 + 27) \text{ else } (3 + 4) : \text{Int}}}$$

- Ιδιότητες του συστήματος τύπων

- Θεώρημα μοναδικότητας τύπων
- Θεώρημα μοναδικότητας παραγωγών
- Λήμμα αντιστροφής (inversion lemma):
Μέθοδος κατασκευής παραγωγών τύπου, π.χ.
▷ αν $e_1 < e_2 : \tau$ τότε $\tau = \text{Bool}$,
 $e_1 : \text{Int}$ και $e_2 : \text{Int}$

Βασικοί τύποι

(ix)

- Ιδιότητες του συστήματος τύπων (συνέχεια)

- Θεώρημα προόδου (progress):
Αν $e : \tau$ τότε είτε e είναι τιμή, είτε υπάρχει e' τέτοιο ώστε $e \rightarrow e'$
- Θεώρημα διατήρησης (preservation):
Αν $e : \tau$ και $e \rightarrow e'$ τότε $e' : \tau$
- Ασφάλεια = Πρόοδος + Διατήρηση
Αν η έκφραση e έχει τύπο, η αποτίμησή της δεν μπορεί να κολλήσει