Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχ. και Μηχ. Υπολογιστών
Προγραμματισμός Ηλεκτρονικών Υπολογιστών, 1ο εξαμήνο
https://courses.softlab.ntua.gr/progintro/
***Ε. Ζάχος*, Ν. Παπασπύρου, Δ. Φωτάκης, Π. Ποτίκας, Δ. Σούλιου, Κ. Τζαμαλούκας**

1η Σειρά Ασκήσεων

Α. Εξοικείωση με την χρήση της Βιβλιοθήκης ή του Διαδικτύου (π.χ. www.wikipedia.org)

Γράψτε λίγα λόγια (το πολύ 5 γραμμές) για τον καθένα από τους: Leibniz, Euler, Gauss, Cantor, Hilbert, Gödel, Turing, Specker, Fibonacci, Babbage, Hollerith, von Neumann, Dijkstra, Sifakis. Απαγορεύεται να ρωτήσετε άλλους, δια ζώσης ή με e-mail.

Β. Παράταξη

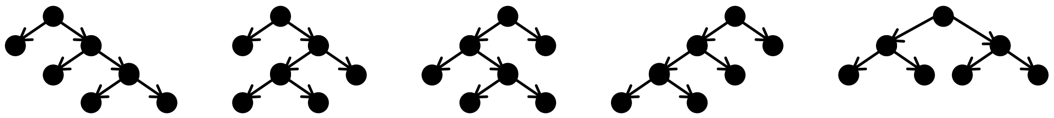
Αθλητές παρατάσσονται σε Ν στήλες και Μ γραμμές. Από κάθε στήλη διαλέγουμε τον ψηλότερο και από αυτούς επιλέγουμε τον πιο κοντό, τον οποίο ονομάζουμε Α. Από κάθε γραμμή πάλι (στην αρχική παράταξη) διαλέγουμε τον κοντύτερο και από αυτούς τον πιο ψηλό, τον οποίο ονομάζουμε Β.
Ποια σχέση ύψους υπάρχει ανάμεσα στο Α και στο Β (Απόδειξη);

Γ. Διαγωνιοποίηση

Ορισμός: Ένα σύνολο λέγεται αριθμήσιμο εάν μπορούμε να το αντιστοιχίσουμε αμφιμονοσήμαντα με τους φυσικούς αριθμούς **N.**
Ισχυρισμός: Το σύνολο των συναρτήσεων $\mathbf{f : N \to N}$ δεν είναι αριθμήσιμο.
Ιδέα της μεθόδου της διαγωνιοποίησης: Θεωρούμε ένα τετραγωνικό πίνακα με στοιχεία 0 ή 1. Ονομάζουμε d τη διαγώνιο και D ένα διάνυσμα του οποίου κάθε στοιχείο είναι $1\text{-}d_i$. Τότε το D είναι διαφορετικό από κάθε σειρά του πίνακα (γιατί;). Αυτή η ιδέα λειτουργεί και για πίνακες απείρου μεγέθους.
Απόδειξη του ισχυρισμού: Έστω ότι υπάρχει απαρίθμηση όλων των συναρτήσεων $\mathbf{f : N \to N}$:
f_0: $f_0(0)$, $f_0(1)$, $f_0(2)$, …
f_1: $f_1(0)$, $f_1(1)$, $f_1(2)$, …
f_2: $f_2(0)$, $f_2(1)$, $f_2(2)$, …
……………………….
Η συνάρτηση $g(n)=f_n(n)+1$ είναι διαφορετική από κάθε f_i (άτοπο).
Να δείξετε ότι ούτε το σύνολο των γνησίως αυξουσών συναρτήσεων $\mathbf{f : N \to N}$ δεν είναι αριθμήσιμο.

Δ. Δυαδικά δέντρα.

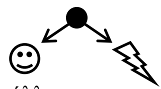
Ιδού όλα τα δυαδικά δέντρα (χωρίς εκφυλισμένους κόμβους) με 4 φύλλα:



Επαγωγικός ορισμός:

α) ● είναι δυαδικό δέντρο

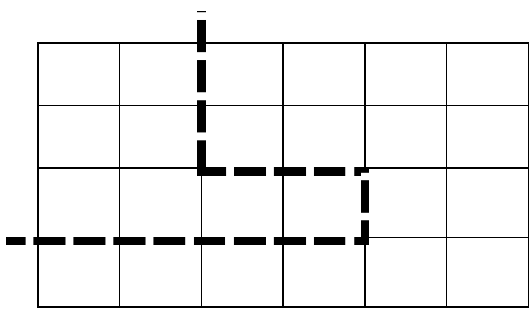
β) εάν ☺ και  είναι δυαδικά δέντρα τότε είναι δυαδικό δέντρο και αυτό:



α) Ζωγραφίστε όλα τα δυαδικά δέντρα με 2, 3 και 5 φύλλα.
β) Πόσα δυαδικά δέντρα υπάρχουν με 6 φύλλα που έχουν 2 φύλλα αριστερά και 4 φύλλα δεξιά;
γ) Πόσα δυαδικά δέντρα υπάρχουν με 6 φύλλα;
δ) Πόσα δυαδικά δέντρα υπάρχουν με n φύλλα; (είναι αρκετό να εκφράσετε τον αριθμό a_n των δυαδικών δέντρων με n φύλλα με ένα τύπο που χρησιμοποιεί τους $a_1 \ldots a_{n-1}$. Αριθμοί CATALAN.)
ε) Προαιρετικά: Να εκφράσετε το a_n με κλειστό τύπο, δηλαδή χωρίς χρήση των $a_1 \ldots a_{n-1}$.

Ε. Το πρόβλημα της Ελβετικής Σοκολάτας.

Έχουμε μία πλάκα ελβετικής σοκολάτας διαστάσεων 4x6. Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός φορών που πρέπει να κόψουμε τη σοκολάτα, ώστε να καταλήξουμε σε 24 μικρά κομματάκια διαστάσεων 1x1; (αποδείξτε τον ισχυρισμό σας!)
Οι τομές που κάνουμε στη σοκολάτα μπορούν να έχουν σχήμα οποιασδήποτε τεθλασμένης γραμμής η οποία ξεκινάει από ένα σημείο της περιμέτρου του κομματιού και καταλήγει σε κάποιο άλλο σημείο της περιμέτρου. Η γραμμή δεν μπορεί όμως να τέμνει τον εαυτό της. Κάθε φορά που κόβουμε, απομακρύνουμε μεταξύ τους τα κομμάτια που προκύπτουν και εν συνεχεία κόβουμε το καθένα ξεχωριστά.



► Τα παραπάνω (Α-Ε) να παραδοθούν στον υπεύθυνο του εργαστηρίου σας μέχρι την εβδομάδα 14/10/2019 – 18/10/2019

ΣΤ. Αριθμητική με «ανάποδους» αριθμούς (Πολλαπλάσια Specker).

Ορίζουμε τον *ανάποδο* ενός αριθμού $\overline{xyzw}$ ως τον αριθμό $\overline{wzyx}$ που αποτελείται από τα ίδια ψηφία σε αντίστροφη σειρά.

α) Πόσους μη-τετριμμένους τετραψήφιους αριθμούς μπορείτε να βρείτε με την ιδιότητα να διαιρούνται ακριβώς από τον ανάποδό τους; Παραδείγματα τετριμμένων αριθμών: οι παλινδρομικοί (π.χ. ο 1991 προφανώς διαιρείται από τον ανάποδό του που είναι ο ίδιος ο 1991), όσοι αρχίζουν από ‘0’ (π.χ. ο 0237 δεν θεωρείται τετραψήφιος) και όσοι τελειώνουν σε ‘0’ (γιατί ο ανάποδός τους δεν είναι τετραψήφιος).

†β) Έστω ένας μη-τετριμμένος αριθμός $\overline{xyzw}$ που διαιρείται από τον ανάποδό του (δηλαδή ένας από αυτούς που δώσατε ως λύση στο ερώτημα α — θεωρήστε ότι τα *x*, *y*, *z* και *w* είναι στο εξής συγκεκριμένα δεκαδικά ψηφία). Αποδείξτε ότι και ο $\overline{xy9zw}$ διαιρείται από τον ανάποδό του. Στη συνέχεια, αποδείξτε ότι όσα ‘9’ και αν βάλουμε στη μέση, ο $\overline{xy9\ldots9zw}$ διαιρείται από τον ανάποδό του (θα συμβολίζουμε με 9* οποιαδήποτε επανάληψη του ψηφίου ‘9’, δηλαδή μηδέν ή περισσότερες φορές, άρα $\overline{xy9^*zw}$). Αποδείξτε, τέλος, ότι οι μοναδικοί μη-τετριμμένοι αριθμοί που διαιρούνται από τον ανάποδό τους και έχουν τα δύο πρώτα ψηφία τους x, y και τα δύο τελευταία ψηφία τους z, w είναι της μορφής $\overline{xy9^*zw0^*xy9^*zw0^*\ldots0^*xy9^*zw}$ (συμβολικά $\overline{xy9^*zw(0^*xy9^*zw)^*}$ με regular expression).

†γ) Υπάρχουν άλλοι μη-τετριμμένοι αριθμοί με περισσότερα από 4 ψηφία που διαιρούνται από τον ανάποδό τους, εκτός από αυτούς που περιγράφονται στο ερώτημα β;

††δ) Τι αλλάζει αν θεωρήσουμε τα παραπάνω ερωτήματα για αριθμούς όχι δεκαδικούς αλλά γραμμένους σε άλλη βάση;

Υπόμνημα: † σημαίνει «δύσκολο», †† σημαίνει «αν το λύσετε, μιλήστε με το Ζάχο»...

► Να παραδοθεί στον υπεύθυνο του εργαστηρίου σας μέχρι την εβδομάδα 21/10/2019 – 25/10/2019

1. Εξάσκηση στην χρήση του editor vi και του compiler της C++.

Χρησιμοποιήστε τον editor για να γράψετε (π.χ. *edit hello1a.cpp*), μετά τον compiler για να μεταφράσετε (π.χ. *c++ hello1a.cpp*) και μετά να εκτελέσετε (π.χ. *run hello1a.exec*) τα ακόλουθα προγράμματα:

1a
```
#include "pzhelp"

PROGRAM {
  WRITELN("hello world");
}
```

1b
```
#include "pzhelp"

PROGRAM {
  WRITELN("hello", "world");
}
```

1c
```
#include "pzhelp"

PROGRAM {
  WRITE("hello "); WRITELN("world");
}
```

1d
```
#include "pzhelp"

PROGRAM {
  WRITE("hello", "world"); WRITELN();
}
```

2
```
#include "pzhelp"

PROC hello () {
  WRITELN("hello world");
}

PROGRAM {
  hello(); hello(); hello(); hello();
}
```

3
```
#include "pzhelp"

PROC hello () {
  WRITELN("hello world");
}

PROGRAM {
  int i;
  FOR(i, 1 TO 20) hello();
}
```

4
```
#include "pzhelp"

const int n = 20;
int i;

PROC num_hello () {
  WRITELN(i, "hello world");
}

PROGRAM {
  FOR(i, 1 TO n) num_hello();
}
```

5
```
#include "pzhelp"

PROC hello () {
  WRITELN("hello world");
}

PROGRAM {
  int n, i;
  WRITE("Give number of greetings",
        "then press <enter>: ");
  n = READ_INT();
  FOR(i, 1 TO n) hello();
}
```

6
```
#include "pzhelp"

PROC hello () {
  WRITELN("hello world");
}

PROGRAM {
  int n, i;
  WRITE("Give number of greetings then press <enter>: ");
  n = READ_INT();
  if (n < 0) WRITELN("The number", n, "is negative");
  else       FOR(i, 1 TO n) hello();
}
```

► Τα προγράμματα 1a-4 να υποβληθούν στο αυτόματο σύστημα υποβολής και ελέγχου την εβδομάδα 1/10/2019 – 4/10/2019
Τα προγράμματα 5-6 να επιδειχθούν στον υπεύθυνο του εργαστηρίου μέχρι την εβδομάδα 1/10/2019 – 4/10/2019