Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχ. και Μηχ. Υπολογιστών
Προγραμματισμός Ηλεκτρονικών Υπολογιστών, 1ο εξάμηνο
http://courses.softlab.ntua.gr/progintro/
Ε. Ζάχος, Ν. Παπασπύρου, Α. Παγουρτζής

1η Σειρά Ασκήσεων

Α. Εξοικείωση με την χρήση της Βιβλιοθήκης ή του Διαδικτύου

Γράψτε λίγα λόγια (το πολύ πέντε γραμμές) για τον καθένα από τους: Leibniz, Euler, Gauss, Cantor, Gödel, Turing, Wirth, Specker.

Β. Παράταξη

Αθλητές παρατάσσονται σε Ν στήλες και Μ γραμμές. Από κάθε στήλη διαλέγουμε τον ψηλότερο και από αυτούς επιλέγουμε τον πιο κοντό, τον οποίο ονομάζουμε Α. Από κάθε γραμμή πάλι (στην αρχική παράταξη) διαλέγουμε τον κοντύτερο και από αυτούς τον πιο ψηλό, τον οποίο ονομάζουμε Β.
Ποια σχέση ύψους υπάρχει ανάμεσα στο Α και στο Β (Απόδειξη);

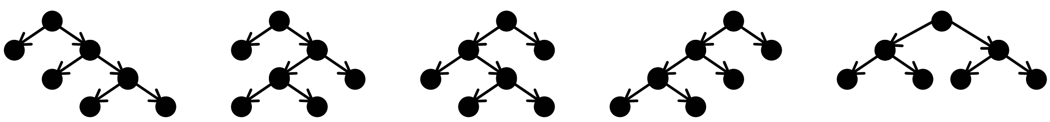
Γ. Διαγωνιοποίηση

Ορισμός: Ένα σύνολο λέγεται αριθμήσιμο εάν μπορούμε να το αντιστοιχίσουμε αμφιμονοσήμαντα με τους φυσικούς αριθμούς **N.**
Ισχυρισμός: Το σύνολο των συναρτήσεων **f:N→N** δεν είναι αριθμήσιμο.
Ιδέα της μεθόδου της διαγωνιοποίησης: Θεωρούμε ένα τετραγωνικό πίνακα με στοιχεία 0 ή 1. Ονομάζουμε d τη διαγώνιο και D ένα διάνυσμα του οποίου κάθε στοιχείο είναι $1\text{-}d_i$. Τότε το D είναι διαφορετικό από κάθε σειρά του πίνακα (γιατί;).
Αυτή η ιδέα λειτουργεί και για πίνακες απείρου μεγέθους.
Απόδειξη του ισχυρισμού: Έστω ότι υπάρχει απαρίθμηση όλων των συναρτήσεων **f:N→N**:
f_0: $f_0(0)$, $f_0(1)$, $f_0(2)$, …
f_1: $f_1(0)$, $f_1(1)$, $f_1(2)$, …
f_2: $f_2(0)$, $f_2(1)$, $f_2(2)$, …
……………………….
Η συνάρτηση $g(n)=f_n(n)+1$ είναι διαφορετική από κάθε f_i (άτοπο).

Να δείξετε ότι ούτε το σύνολο των γνησίως αυξουσών συναρτήσεων **f:N→N** δεν είναι αριθμήσιμο.

Δ. Δυαδικά δέντρα.

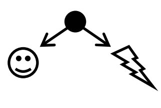
Ιδού όλα τα δυαδικά δέντρα (χωρίς εκφυλισμένους κόμβους) με 4 φύλλα:



Επαγωγικός ορισμός:

α) ● είναι δυαδικό δέντρο

β) εάν ☺ και  είναι δυαδικά δέντρα τότε είναι δυαδικό δέντρο και αυτό:



α) Ζωγραφίστε όλα τα δυαδικά δέντρα με 2, 3 και 5 φύλλα.
β) Πόσα δυαδικά δέντρα υπάρχουν με 6 φύλλα που έχουν 2 φύλλα αριστερά και 4 φύλλα δεξιά;
γ) Πόσα δυαδικά δέντρα υπάρχουν με 6 φύλλα;
δ) Πόσα δυαδικά δέντρα υπάρχουν με n φύλλα; (είναι αρκετό να εκφράσετε τον αριθμό a_n των δυαδικών δέντρων με n φύλλα με ένα τύπο που χρησιμοποιεί τους a_1 ... a_{n-1}. Αριθμοί CATALAN.)
ε) Προαιρετικά: Να εκφράσετε το a_n με κλειστό τύπο, δηλαδή χωρίς χρήση των a_1 ... a_{n-1}.

Ε. Πρόβλημα Βασιλισσών. Λατινικά και Μαγικά Τετράγωνα.

i) Σε μια σκακιέρα 4×4 τοποθετήστε 4 βασίλισσες που να μην αλληλοαπειλούνται (Μέθοδος Οπισθοδρόμησης). Πόσες ουσιαστικά διαφορετικές λύσεις υπάρχουν;
ii) Το ίδιο για σκακιέρα 5×5 με 5 βασίλισσες.
iii) Η επιφάνεια που δημιουργείται, αν ταυτίσουμε αφενός την πάνω με την κάτω πλευρά αφετέρου την δεξιά με την αριστερή πλευρά της σκακιέρας λέγεται τόρος. Δεν υπάρχει τρόπος να τοποθετηθούν 4 βασίλισσες στην τορο-σκακιέρα 4×4 που να μην αλληλοαπειλούνται. Υπάρχει (ουσιαστικά μόνο ένας) τρόπος να τοποθετηθούν 5 βασίλισσες στην τορο-σκακιέρα 5×5 ώστε να μην αλληλοαπειλούνται.
iv) Σε ένα πίνακα 5×5 τοποθετήστε τα γράμματα a,b,c,d,e (ένα σε κάθε τετραγωνάκι) έτσι ώστε σε κάθε γραμμή, στήλη και διαγώνιο (και τοροειδώς) να έχουμε διαφορετικά γράμματα.
v) Τοποθετήστε τώρα στον πίνακα 5×5 συνδυασμούς των λατινικών γραμμάτων a,b,c,d,e και των ελληνικών γραμμάτων α,β,γ,δ,ε έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι συνθήκες του (iv) για τα λατινικά και τα ελληνικά, και επιπλέον να μην έχουμε τον ίδιο συνδυασμό δύο φορές (Αυτό λέγεται <u>λατινικό</u> τετράγωνο).
vi) Αν θέσουμε a=α=0, b=β=1, γ=c=2, d=δ=3, e=ε=4 και διαβάσουμε το συνδυασμό ψηφίων στο πενταδικό σύστημα (π.χ. bδ=13_5 =8), τότε έχουμε ένα μαγικό τόρο (τοροειδές τετράγωνο). Δηλαδή, εμφανίζονται όλοι οι αριθμοί από 0 έως 24 έτσι ώστε τα αθροίσματα σε στήλες, γραμμές και (τοροειδείς) διαγωνίους να είναι ίσα. Ελέξτε το.
vii) Δοκιμάστε να βρείτε αλγοριθμικό κανόνα για την κατασκευή μαγικού τόρου 5×5. Σημειωτέον ότι δεν υπάρχει μαγικό τετράγωνο 2×2, υπάρχει 3×3, 4×4, 6×6, 8×8, 9×9 αλλά δεν υπάρχει μαγικός τόρος. Υπάρχει όμως μαγικός τόρος 5×5, 7×7, 11×11 (και πολλοί 13×13). Τι σχέση υπάρχει μεταξύ των τριών προβλημάτων (όλα σε τόρο): Βασιλισσών-Λατινικών τετραγώνων-Μαγικών τετραγώνων ;

ΣΤ. Το παιχνίδι Specker Π_n

Το παιχνίδι Π_3:
Δίνονται 3 σωροί με ομοειδή κέρματα π.χ. με 2,3 και 4 κέρματα (γενικότερα: a,b,c κέρματα, a,b,c φυσικοί, $0<a<=b<=c$).
Δύο παίχτες, ο Α και ο Β παίζουν εναλλάξ με τους ίδιους κανόνες. Αρχίζει ο Α.
Ο παίχτης διαλέγει δυο από τους 3 σωρούς. Βγάζει από τον μικρότερο σωρό όσα κέρματα θέλει και βάζει στον μεγαλύτερο σωρό όσα κέρματα θέλει (όχι αναγκαστικά τον ίδιο αριθμό και υποθέτουμε ότι υπάρχει απεριόριστη παρακαταθήκη κερμάτων). Αν οι δύο επιλεγμένοι σωροί είναι ίσοι τότε δεν έχει σημασία από ποιον θα αφαιρεθούν άρα και σε ποιόν σωρό θα προστεθούν κέρματα.
Χάνει ο παίχτης που δεν έχει πια δυο σωρούς να επιλέξει.

1) Από αρχική κατάσταση (2,3,4) ποιές είναι οι δυνατές καταστάσεις μετά από μια κίνηση του παίχτη Α; (αν απαγορεύεται σωρός με περισσότερα από 5 κέρματα).
2) Ποια από τις ανωτέρω κινήσεις οδηγεί σε νίκη του Α ακόμα και αν ο Β παίξει με τον καλύτερο δυνατό τρόπο; (Άρα καλή **στρατηγική** για τον Α)
3) Πόσο διαρκεί το μακρύτερο παιχνίδι, όταν ο Α προσπαθεί να νικήσει το συντομότερο;
4) Είναι δυνατόν να παίξουν έτσι ώστε το παιχνίδι να διαρκέσει περισσότερο από 1000000 κινήσεις (εάν παρεπιπτόντως δεν τους ενδιαφέρει η νίκη). Εξηγείστε.
5) Ποιος έχει στρατηγική για να νικήσει αν το παιχνίδι αρχίσει σε μια από τις επόμενες καταστάσεις; (5,5,5),(5,5,6),(5,6,6),(6,6,6)
6) Μια κατάσταση (a,b,c) θα λέγεται **επιτυχημένη** αν ο παίχτης Α έχει στρατηγική να νικήσει. Μια κατάσταση θα λέγεται **αποτυχημένη** αν ο παίχτης Β έχει στρατηγική να νικήσει. Να χαρακτηρίσετε τις επιτυχημένες και τις αποτυχημένες καταστάσεις.
7) Στο παιχνίδι Π_3, είναι το σύνολο των επιτυχημένων καταστάσεων συμπληρωματικά του συνόλου των αποτυχημένων καταστάσεων; (Γενίκευση;)
8) Να εφεύρετε μια παραλλαγή του Π_3 επιτρέποντας επιπλέον κινήσεις έτσι ώστε η ένωση των επιτυχημένων και των αποτυχημένων καταστάσεων να μη δίνει το σύνολο όλων των καταστάσεων.
9) Π_4: Γενικεύστε το παιχνίδι Π_3 έτσι ώστε η αρχική κατάσταση να έχει 4 σωρούς από κέρματα.
10) Βρείτε τις επιτυχημένες και τις αποτυχημένες καταστάσεις για το Π_4 (με απόδειξη).
11) (*) Αναλόγως ορίστε Π_5 (Π_6) και βρείτε τις επιτυχημένες και αποτυχημένες καταστάσεις.
12) (*) Δείξτε: Στο Π_5 είναι δυνατόν σε μια επιτυχημένη κατάσταση (για τον Α) να καταφέρει ο Β να καθυστερήσει την ήττα του όσο θέλει.
13) (*) Το παιχνίδι Π_n (Γενίκευση):
    a. Καταστάσεις: $(a_1,\dots,a_n)^{<=}$, δηλ. $a_i<=a_i+1$, a_i φυσικοί,
    b. Κινήσεις: a_i,a_j ($i<j$ άρα και $a_i<=a_j$) να αντικατασταθεί με a_i', a_j' έτσι ώστε $a_i'<a_i$, $a_j'>a_j$ και να ταξινομηθεί η νέα n-άδα.
    c. Ήττα: Δεν υπάρχει κίνηση, δηλ. $(0,0,....,a_n)$

    Αποδείξτε το:
    Θεώρημα: Το παιχνίδι Π_n είναι πεπερασμένο (δηλαδή τελειώνει πάντα μετά από πεπερασμένο αριθμό κινήσεων) (με επαγωγή για το n)

Να παραδοθούν στον υπεύθυνο του εργαστηρίου σας την εβδομάδα 11/10/2004-14/10/2004