

Η γλώσσα ML σε βάθος



Joan Miró, *El Carnaval del Arlequín*, 1925

Κωστής Σαγώνας <kostis@cs.ntua.gr>
Ζωή Παρασκευοπούλου <zoeper@softlab.ntua.gr>

Περισσότερη ML

- Περισσότεροι τύποι
 - Επισημειώσεις τύπων
 - Μετατροπές τύπων
 - Συμπερασμός τύπων
- Συναρτήσεις υψηλής τάξης
- Ορισμός σύνθετων τύπων δεδομένων
- Case analysis

Η γλώσσα ML σε βάθος

2

Τι σημαίνουν οι τύποι συναρτήσεων στην ML

- $f : A \rightarrow B$ σημαίνει:

- Για κάθε $x \in A$,

$$f(x) = \begin{cases} \text{για κάποιο στοιχείο } y = f(x) \in B \\ \text{ατέρμονη εκτέλεση} \\ \text{η εκτέλεση τερματίζει εγείροντας κάποια εξαίρεση} \end{cases}$$

- Με λόγια:
“εάν η αποτίμηση $f(x)$ τερματίσει κανονικά, τότε $f(x) \in B$ ”
- Δηλαδή, η πρόσθεση δε θα εκτελεστεί σε μια έκφραση της μορφής $\mathbf{x} + 3$ εάν η \mathbf{x} εγείρει κάποια εξαίρεση

Επισημειώσεις τύπων (type annotations)

```
- fun prod (a,b) = a*b;  
val prod = fn : int * int -> int
```

- Γιατί `int` και όχι `real`;
- Διότι ο προεπιλεγμένος τύπος (default type) του αριθμητικού τελεστή `*` (όπως και των `+`, `-`) είναι
`int * int -> int`
- Αν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση με ορίσματα τύπου `real` μπορούμε να βάλουμε μια υποσημείωση τύπου στα συγκεκριμένα ορίσματα

Η γλώσσα ML σε βάθος

3

Η γλώσσα ML σε βάθος

4

Παράδειγμα επισημειώσεων τύπων στην ML

```
- fun prod (a:real,b:real):real = a*b;  
val prod = fn : real * real -> real
```

- Οι επισημειώσεις τύπων αποτελούνται από μια άνω κάτω τελεία και έναν τύπο και μπορούν να μπουν παντού
- Όλοι τα παρακάτω ορισμοί είναι ισοδύναμοι:

```
fun prod (a,b):real = a * b;  
fun prod (a:real,b) = a * b;  
fun prod (a,b:real) = a * b;  
fun prod (a,b) = (a:real) * b;  
fun prod (a,b) = a * b:real;  
fun prod (a,b) = (a*b):real;  
fun prod ((a,b):real * real) = a*b;
```

Συναρτήσεις μετατροπής τύπων

```
- real 123;      (* real here is a function *)  
val it = 123.0 : real  
- floor 3.6;  
val it = 3 : int  
- str #"a";  
val it = "a" : string
```

Ενσωματωμένες συναρτήσεις μετατροπής τύπων:

- `real : int → real`
- `floor : real → int, ceil : real → int,`
- `round : real → int, trunc : real → int,`
- `ord : char → int,`
- `chr : int → char,`
- `str : char → string`

Αποτίμηση “βραχυκύκλωσης” στην ML

```
- true orelse 1 div 0 = 0;  
val it = true : bool
```

- Οι τελεστές `andalso` και `orelse` “βραχυκυκλώνουν” (short-circuit) στην ML:
 - Εάν η έκφραση του πρώτου ορίσματος του `orelse` αποτιμάται ως αληθής (`true`), η έκφραση του δεύτερου δεν αποτιμάται
 - Παρόμοια, εάν το πρώτο όρισμα του `andalso` είναι ψευδές
- Με βάση το “γράμμα” της θεωρίας, δεν είναι πραγματικόί τελεστές αλλά λέξεις κλειδιά (keywords) της γλώσσας
- Αυτό διότι, σε μια πρόθυμη (eager) γλώσσα σαν την ML, όλοι οι τελεστές αποτιμούν πλήρως τα ορίσματά τους

Πολυμορφικές συναρτήσεις για λίστες

- Αναδρομική συνάρτηση που υπολογίζει το μήκος μιας λίστας (οποιοδήποτε τύπου)

```
- fun length x =  
=   if null x then 0  
=   else 1 + length (tl x);  
val length = fn : 'a list -> int  
- length [true,false,true];  
val it = 3 : int  
- length [4.0,3.0,2.0,1.0];  
val it = 4 : int
```

Σημείωση: η συνάρτηση `length` είναι μέρος της ML, οπότε ο παραπάνω ορισμός είναι περιττός

Πολυμορφισμός για τύπους ισότητας

```
- fun length_eq x =  
=   if x = [] then 0  
=   else 1 + length_eq (tl x);  
val length_eq = fn : 'a list -> int  
- length_eq [true,false,true];  
val it = 3 : int  
- length_eq [4.0,3.0,2.0,1.0];  
Error: operator and operand don't agree  
[equality type required]
```

- Μεταβλητές τύπων που αρχίζουν με δύο αποστρόφους, όπως ο `'a`, περιορίζονται σε τύπους ισότητας
- Η ML συμπεραίνει αυτόν τον περιορισμό διότι συγκρίναμε τη μεταβλητή `x` για ισότητα με την κενή λίστα. Αυτό δε θα συνέβαινε εάν είχαμε χρησιμοποιήσει τη συνθήκη `null x` αντί για την `x=[]`.

Πολυμορφισμός για τύπους ισότητας

```
- fun count_eq ([], x) = 0  
=   | count_eq (y::ys, x) =  
=     (if x = y then 1 else 0) + count_eq (ys, x);  
val count_eq = fn : 'a list * 'a -> int  
  
- count_eq ([true,false,true], true);  
val it = 2 : int  
- count_eq ([4.0,3.0,2.0,1.0], 1.0);  
Error: operator and operand don't agree  
[equality type required]
```

Αποδοτικές συναρτήσεις για λίστες

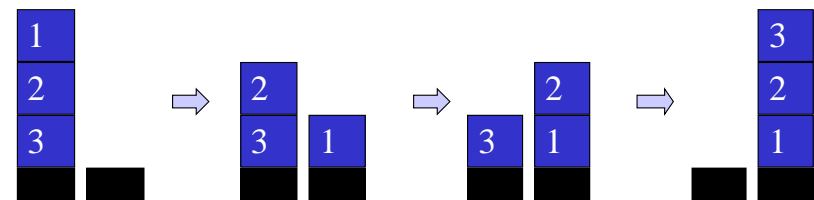
- Αναστροφή μιας λίστας

```
fun reverse nil = nil  
  | reverse (x::xs) = (reverse xs) @ [x]
```

- Ερωτήσεις:
 - Είναι σωστή η παραπάνω υλοποίηση της συνάρτησης `reverse`;
 - Πόσο αποδοτική είναι;
 - Μπορούμε να αναστρέψουμε μια λίστα με ένα μόνο πέρασμα;

Πιο αποδοτική συνάρτηση `reverse`

```
fun reverse xs =  
  let  
    fun rev (nil, acc) = acc  
      | rev (y::ys, acc) = rev (ys, y::acc)  
  in  
    rev (xs, nil)  
  end
```



Συναρτήσεις Υψηλής Τάξης

Συναρτήσεις υψηλής τάξης

- Κάθε συνάρτηση έχει μία **τάξη** (order):
 - Μια συνάρτηση που δεν παίρνει άλλες συναρτήσεις ως παραμέτρους και δεν επιστρέφει ως αποτέλεσμα μια άλλη συνάρτηση έχει **τάξη 1**
 - Μια συνάρτηση που παίρνει άλλες συναρτήσεις ως παραμέτρους ή επιστρέφει ως αποτέλεσμα μια άλλη συνάρτηση έχει **τάξη n+1**, όπου **n** είναι η μέγιστη τάξη των παραμέτρων της και του αποτελέσματός της
- Η συνάρτηση **map** που είδαμε στο προηγούμενο μάθημα είναι δεύτερης τάξης

```
- map ;  
val it = fn : ('a -> 'b) -> 'a list -> 'b list
```

Πρακτική εξάσκηση

- Τι τάξεως είναι οι συναρτήσεις της ML με τους παρακάτω τύπους;

```
int * int -> bool  
int list * (int * int -> bool) -> int list  
int -> int -> int  
(int -> int) * (int -> int) -> (int -> int)  
int -> bool -> real -> string
```
- Τι μπορούμε να πούμε για την τάξη της συνάρτησης με τον παρακάτω τύπο;

```
('a -> 'b) * ('c -> 'a) -> 'c -> 'b
```

Η λέξη κλειδί op

```
- op * ;  
val it = fn : int * int -> int
```

- Οι ένθετοι τελεστές (infix operators) είναι ειδικές συναρτήσεις
- Όμως μερικές φορές θέλουμε να τους χρησιμοποιήσουμε ως κοινές συναρτήσεις: για παράδειγμα, να περάσουμε τον τελεστή `<` σαν όρισμα τύπου `int * int -> bool`
- Η λέξη κλειδί `op` πριν από κάποιον τελεστή επιστρέφει την αντίστοιχη συνάρτηση.

```
- quicksort  
val it = fn : int list -> (int * int -> int) -> int  
- quicksort [1,4,3,2,5] (op <) ;  
val it = [1,2,3,4,5] : int list
```

Προκαθορισμένες συναρτήσεις υψηλής τάξης

- Τρεις σημαντικές προκαθορισμένες συναρτήσεις υψηλής τάξης:
 1. `map`
 2. `foldr`
 3. `foldl`
- Η `foldr` και η `foldl` είναι παρόμοιες

Η συνάρτηση `map`

- Εφαρμόζει μια συνάρτηση σε κάθε στοιχείο μιας λίστας και επιστρέφει τα αποτελέσματα της εφαρμογής σε μια νέα λίστα

```
- map ~ [1,2,3,4];
val it = [~1,~2,~3,~4] : int list
- map (fn x => x+1) [1,2,3,4];
val it = [2,3,4,5] : int list
- map (fn x => x mod 2 = 0) [1,2,3,4];
val it = [false,true,false,true] : bool list
- map (op +) [(1,2), (3,4), (5,6)];
val it = [3,7,11] : int list
- val f = map (op +);
val f = fn : (int * int) list -> int list
- f [(1,2), (3,4)];
val it = [3,7] : int list
```

Η συνάρτηση `foldr`

- Συνδυάζει, μέσω μιας συνάρτησης, όλα τα στοιχεία μιας λίστας
- Παίρνει ως ορίσματα μια συνάρτηση f , μια αρχική τιμή c , και μια λίστα $x = [x_1, \dots, x_n]$ και υπολογίζει την τιμή:

$$f(x_1, f(x_2, \dots, f(x_{n-1}, f(x_n, c)) \dots))$$

- Για παράδειγμα η κλήση:

```
foldr (op +) 0 [1,2,3,4]
```

αποτιμάται σε $1 + (2 + (3 + (4 + 0))) = 10$

Η συνάρτηση `foldr`

```
- fun foldr f x0 [] = x0
= | foldr f x0 (x::xs) = f(x, foldr f x0 xs);
val foldr = fn : ('a * 'b -> 'b) -> 'b -> 'a list -> 'b
```

Παραδείγματα χρήσης foldr

```
- foldr (op +) 0 [1,2,3,4];
val it = 10 : int
- foldr (op * ) 1 [1,2,3,4];
val it = 24 : int
- foldr (op ^) "" ["abc","def","ghi"];
val it = "abcdefghi" : string
- foldr (op ::) [5] [1,2,3,4];
val it = [1,2,3,4,5] : int list
- foldr;
val it = fn : ('a * 'b -> 'b) -> 'b -> 'a list -> 'b
- foldr (op +);
val it = fn : int -> int list -> int
- foldr (op +) 0;
val it = fn : int list -> int
- val addup = foldr (op +) 0;
val addup = fn : int list -> int
- addup [1,2,3,4,5];
val it = 15 : int
```

Η συνάρτηση foldl

- Συνδυάζει, μέσω μιας συνάρτησης, όλα τα στοιχεία μιας λίστας (όπως η `foldr`)
- Παίρνει ως ορίσματα μια συνάρτηση f , μια αρχική τιμή c , και μια λίστα $x = [x_1, \dots, x_n]$ και υπολογίζει την τιμή:

$$f(x_n, f(x_{n-1}, \dots, f(x_2, f(x_1, c)) \dots))$$

- Για παράδειγμα η κλήση:

```
foldl (op +) 0 [1,2,3,4]
```

αποτιμάται σε $4 + (3 + (2 + (1 + 0))) = 10$

Σημείωση: Η `foldr` αποτιμήθηκε ως $1 + (2 + (3 + (4 + 0))) = 10$

Η συνάρτηση foldl

```
- fun foldl f acc [] = x0
= | foldl f acc (x::xs) = foldl f f(x,acc) xs;
val foldl = fn : ('a * 'b -> 'b) -> 'b -> 'a list -> 'b
```

Παραδείγματα χρήσης foldl

- Η `foldl` αρχίζει από αριστερά, η `foldr` από τα δεξιά
- Φυσικά, δεν υπάρχει κάποια διαφορά όταν η συνάρτηση είναι αντιμεταθετική και προσεταιριστική, όπως οι $+$ και $*$
- Για άλλες συναρτήσεις όμως υπάρχει διαφορά

```
- foldr (op ^) "" ["abc","def","ghi"];
val it = "abcdefghi" : string
- foldl (op ^) "" ["abc","def","ghi"];
val it = "ghidefabcd" : string
- foldr (op -) 0 [1,2,3,4];
val it = ~2 : int
- foldl (op -) 0 [1,2,3,4];
val it = 2 : int
```

Δηλώσεις Τύπων Δεδομένων

Η γλώσσα ML σε βάθος

25

Ορισμοί τύπων δεδομένων

- Στην ML μπορούμε να ορίσουμε τους δικούς μας τύπους δεδομένων.

- Π.χ. μπορούμε να ορίσουμε απλά enumeration types

```
datatype colour = Red | Green | Blue
```

- Μια τιμή τύπου `colour` είναι μία από τις τιμές `Red`, `Green`, `Blue` (κατασκευαστές δεδομένων του τύπου)

```
- - val x = Red;  
val x = Red : colour
```

- Οι κατασκευαστές μπορούν να έχουν παραμέτρους
- Οι τύποι μπορεί να είναι αναδρομικοί

Η γλώσσα ML σε βάθος

26

Ορισμοί τύπων δεδομένων

Παραδείγματα από την standard library της ML:

```
datatype bool = true | false
```

- Παραμετρικός κατασκευαστής τύπου (parametric type constructor) για λίστες:

```
datatype 'e list = nil  
                  | :: of 'e * 'e list
```

- Αυτοί οι τύποι είναι προκαθορισμένοι, αλλά όχι πρωτόγονοι.

Η γλώσσα ML σε βάθος

27

Ορισμοί τύπων δεδομένων

- Έχουν τη γενική μορφή

```
datatype <name> = <clause> | ... | <clause>  
<clause> ::= <constructor> | <constructor> of <type>
```

- Παραδείγματα:

```
- datatype color = Red | Yellow | Green
```

- στοιχεία: `Red`, `Yellow`, και `Green`

```
- datatype atom = Atm of string | Nnbr of int
```

- στοιχεία: `Atm("a")`, `Atm("b")`, ..., `Nnbr(0)`, `Nnbr(1)`, ...

```
- datatype list = Nil | Cons of atom * list
```

- στοιχεία: `Nil`, `Cons (Atm "a", Nil)`, ...

```
Cons (Nnbr 2, Cons (Atm "ugh", Nil)), ...
```

Η γλώσσα ML σε βάθος

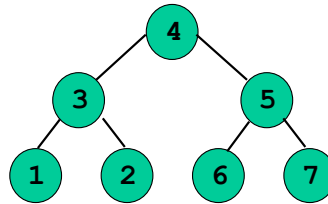
28

Ορισμοί αναδρομικών τύπων δεδομένων

```
datatype 'a tree = Leaf of 'a
                | Node of 'a * 'a tree * 'a tree
```

- Παράδειγμα στιγμιότυπου δένδρου

```
Node (4, Node (3, Leaf (1), Leaf (2)),
      Node (5, Leaf (6), Leaf (7)))
```



- Αναδρομική συνάρτηση χρήσης του τύπου δεδομένων

```
fun sum (Leaf n) = n
  | sum (Node (n, t1, t2)) = n + sum(t1) + sum(t2)
```

Αυστηρό σύστημα τύπων

```
- datatype flip = Heads | Tails;
datatype flip = Heads | Tails
- fun isHeads x = (x = Heads);
val isHeads = fn : flip -> bool
- isHeads Tails;
val it = false : bool
- isHeads Mon;
Error: operator and operand don't agree [tycon mismatch]
operator domain: flip
operand:         day
```

- Η ML είναι αυστηρή σε σχέση με τους νέους τύπους, ακριβώς όπως θα περιμέναμε
- Σε αντίθεση π.χ. με τις `enum` δηλώσεις της C, οι λεπτομέρειες της υλοποίησης δεν είναι εμφανείς στον προγραμματιστή

Κατασκευαστές έναντι συναρτήσεων

```
- datatype exint = Value of int | PlusInf | MinusInf;
datatype exint = MinusInf | PlusInf | Value of int
- PlusInf;
val it = PlusInf : exint
- MinusInf;
val it = MinusInf : exint
- Value;
val it = fn : int -> exint
- Value 42;
val it = Value 42 : exint
```

- Ο `Value` είναι ένας κατασκευαστής δεδομένων με μία παράμετρο: την τιμή του ακεραίου `int` που αποθηκεύει
- Δείχνει σε συνάρτηση που παίρνει έναν ακέραιο (`int`) και επιστρέφει έναν `exint` που περιέχει τον ακέραιο

Όμως ένας `Value 42` δεν είναι `int`

```
- val x = Value 42;
val x = Value 42 : exint
- x + x;
Error: overloaded variable not defined at type symbol: +
type: exint
```

- Ένας `Value 42` είναι ένας `exint`, όχι ένας ακέραιος (`int`), παρότι περιέχει έναν
- Μπορούμε να ανακτήσουμε τις παραμέτρους ενός κατασκευαστή χρησιμοποιώντας ταίριασμα προτύπων
- Κατά συνέπεια, ο κατασκευαστής `Value` δεν είναι συνάρτηση: οι κανονικές συναρτήσεις δε μπορούν να χρησιμοποιηθούν με αυτόν τον τρόπο ως πρότυπα

Κατασκευαστές και ταίριασμα προτύπων

```
- fun square PlusInf = PlusInf
=   | square MinusInf = PlusInf
=   | square (Value x) = Value (x*x);
val square = fn : exint -> exint
- square MinusInf;
val it = PlusInf : exint
- square (Value 3);
val it = Value 9 : exint
```

- Μπορούμε να αποδημήσουμε τιμές των νέων τύπων με ταίριασμα προτύπων
- Επειδή ένας `exint` είναι είτε `PlusInf`, ή `MinusInf`, ή `Value`, η παραπάνω συνάρτηση είναι εξαντλητική ως προς το ταίριασμα προτύπων

Χειρισμός εξαιρέσεων στην ML

- Μέσω ταίριασματος προτύπων μπορούμε επίσης να χειριστούμε εξαιρέσεις

```
- fun square PlusInf = PlusInf
=   | square MinusInf = PlusInf
=   | square (Value x) = Value (x*x)
=     handle Overflow => PlusInf;
val square = fn : exint -> exint
- square (Value 10000);
val it = Value 100000000 : exint
- square (Value 100000);
val it = PlusInf : exint
```

- Θα δούμε περισσότερα για τις εξαιρέσεις στη Java

Ένα ακόμα παράδειγμα: `option`

```
datatype 'x option =
  NONE
| SOME 'x
```

- Ένα `'x option` είναι είτε ένα πράγμα τύπου `'x`, είτε τίποτα
- Ορισμένο στο standard library
- Χρήσιμο για ορισμό μερικών συναρτήσεων που δεν ορίζονται σε όλο input space

```
- SOME 1.0;
val it = SOME1.0 : real option
- SOME [true,false];
val it = Group [true,false] : bool bunch
```

Ένα ακόμα παράδειγμα: `option`

- Η συνάρτηση `hd` δεν ορίζεται όταν το input είναι η κενή λίστα, αλλά σηκώνει μια εξαίρεση.
- Εναλλακτικά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα `option` type
- Παρατηρήστε τον τύπο που εξαγεται

```
- fun safe_hd [] = NONE
= | safe_hd (x::_) = SOME x;
val safe_hd = fn : 'a list -> 'a option
```

Εκφράσεις case

```
- val x = Green;  
- val x = Green : color  
- case color of  
=   Red => "red"  
=   | Green => "green"  
=   | Blue => "blue";  
val it = "green" : string
```

- Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε εκφράσεις case για να αναλύσουμε δεδομένα ενός σύνθετου τύπου ή να συγκρίνουμε με σταθερές.
- Μοιάζει με το ταίριασμα προτύπων στις παραμέτρους μιας συνάρτησης, αλλά είναι έκφραση της γλώσσας.

Σύνταξη ταίριασματος

- Μια έκφραση case έχει την παρακάτω σύνταξη στην ML:

```
<case-expr> ::= case <expression> of <match>
```

- Ένα ταίριασμα αποτελείται από έναν ή περισσότερους κανόνες που διαχωρίζονται μεταξύ τους από '|':

```
<match> ::= <rule> | <rule> '|' <match>
```

- Ένας κανόνας έχει την παρακάτω σύνταξη στην ML:

```
<rule> ::= <pattern> => <expression>
```

- Σε ένα ταίριασμα κάθε κανόνας πρέπει να έχει τον ίδιο τύπο με την έκφραση (*expression*) στο δεξί μέρος του κανόνα

Παράδειγμα χρήσης case

```
case list of  
  _::_::c::_ => c  
| _::b::_ => b  
| a::_ => a  
| nil => 0
```

- Η τιμή αυτής της έκφρασης είναι:
 - το τρίτο στοιχείο της λίστας `list`, αν η λίστα έχει τουλάχιστον τρία στοιχεία, ή
 - το δεύτερο στοιχείο της λίστας αν η λίστα έχει μόνο δύο στοιχεία
 - το πρώτο στοιχείο της λίστας `list` αν έχει μόνο ένα, ή
 - ο ακέραιος 0 αν η λίστα `list` είναι κενή
- Λόγω του τελευταίου κανόνα, η λίστα πρέπει να είναι μια λίστα ακεραίων

Η έκφραση case είναι μια γενίκευση της if

```
if exp1 then exp2 else exp3
```

```
case exp1 of  
  true => exp2  
| false => exp3
```


Οι δύο παραπάνω εκφράσεις είναι ισοδύναμες

Με άλλα λόγια, η έκφραση `if-then-else` είναι ειδική περίπτωση μιας έκφρασης `case`

Αυτή ήταν η ML

- ... ή τουλάχιστον, όλη η ML που θα δούμε στις διαλέξεις
- Φυσικά, υπάρχουν κάποια μέρη ακόμα:
 - Εγγραφές (**records**) που είναι σαν τις πλειάδες αλλά έχουν πεδία με ονόματα
 - π.χ. `{name="Arnold", age=42} : {name : string, age : int}`
 - Πίνακες (**arrays**) με στοιχεία που μπορούν να τροποποιηθούν
 - Αναφορές (**references**) για τιμές που μπορούν να τροποποιηθούν
 - Χειρισμός εξαιρέσεων (**exception handling**)
 - Υποστήριξη encapsulation και απόκρυψης δεδομένων:
 - **structures**: συλλογές από τύπους δεδομένων + συναρτήσεων
 - **signatures**: διαπροσωπίες (interfaces) για τα structures
 - **functors**: κάτι σα συναρτήσεις για structures, που όμως επιτρέπουν μεταβλητές τύπων και την ανάθεση τιμών (instantiation) στις παραμέτρους των structures

Κάποια άλλα μέρη της ML

- API: the standard basis
 - Προκαθορισμένες συναρτήσεις, τύποι, κ.λπ.
 - Κάποιες από αυτές είναι σε structures: `Int.maxInt`, `Real.Math.sqrt`, `List.nth`, κ.λπ.
- eXene: μια βιβλιοθήκη της ML για εφαρμογές σε γραφικό περιβάλλον X windows
- O Compilation Manager για διαχείριση μεγαλύτερων projects
- Άλλες διάλεκτοι της ML
 - Objective Caml (OCaml) 
 - Η επέκταση της ML για ταυτοχρονισμό (Concurrent ML - CML)

Συμπερασματικά για τις συναρτησιακές γλώσσες

- Η ML είναι η μόνη γλώσσα που θα εξετάσουμε από τις συναρτησιακές γλώσσες προγραμματισμού
- Σε αυτό το είδος προγραμματισμού, η εκτέλεση γίνεται μέσω αποτίμησης εκφράσεων και ταιριάσματος προτύπων
- Εάν σας αρέσει αυτό το στυλ προγραμματισμού, υπάρχουν και άλλες συναρτησιακές γλώσσες για εξερεύνηση, όπως η Ocaml, η Haskell, η Scala, η Lisp, η Scheme/Racket, η Clean και η Erlang
- Πολλές μοντέρνες γλώσσες υιοθετούν στοιχεία συναρτησιακού προγραμματισμού (Python, JavaScript, Rust, ...)