

# Η γλώσσα ML σε βάθος



Joan Miró, *El Carnaval del Arlequín*, 1925

Κωστής Σαγώνας <[kostis@cs.ntua.gr](mailto:kostis@cs.ntua.gr)>  
Νίκος Παπασπύρου <[nickie@softlab.ntua.gr](mailto:nickie@softlab.ntua.gr)>

# Τι σημαίνουν οι τύποι συναρτήσεων στην ML

---

- $f : A \rightarrow B$  σημαίνει:

- Για κάθε  $x \in A$ ,

$$f(x) = \begin{cases} \text{για κάποιο στοιχείο } y = f(x) \in B \\ \text{ατέρμονη εκτέλεση} \\ \text{η εκτέλεση τερματίζει εγείροντας κάποια εξαίρεση} \end{cases}$$

- Με λόγια:

“εάν η αποτίμηση  $f(x)$  τερματίσει κανονικά, τότε  $f(x) \in B$ ”

- Δηλαδή, η πρόσθεση δε θα εκτελεστεί σε μια έκφραση της μορφής  $f(\mathbf{x}) + 3$  εάν η  $f(\mathbf{x})$  εγείρει κάποια εξαίρεση

# Επισημειώσεις τύπων (type annotations)

---

```
- fun prod (a,b) = a*b;  
val prod = fn : int * int -> int
```

- Γιατί `int` και όχι `real`;
- Διότι ο προεπιλεγμένος τύπος (default type) του αριθμητικού τελεστή `*` (όπως και των `+`, `-`) είναι  
$$\text{int} * \text{int} \rightarrow \text{int}$$
- Αν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση με ορίσματα τύπου `real` μπορούμε να βάλουμε μια υποσημείωση τύπου στα συγκεκριμένα ορίσματα

# Παράδειγμα επισημειώσεων τύπων στην ML

---

```
- fun prod (a:real,b:real):real = a*b;  
val prod = fn : real * real -> real
```

- Οι επισημειώσεις τύπων αποτελούνται από μια άνω κάτω τελεία και έναν τύπο και μπορούν να μπουν παντού
- Όλοι τα παρακάτω ορισμοί είναι ισοδύναμοι:

```
fun prod (a,b):real = a * b;
```

```
fun prod (a:real,b) = a * b;
```

```
fun prod (a,b:real) = a * b;
```

```
fun prod (a,b) = (a:real) * b;
```

```
fun prod (a,b) = a * b:real;
```

```
fun prod (a,b) = (a*b):real;
```

```
fun prod ((a,b):real * real) = a*b;
```

# Συναρτήσεις μετατροπής τύπων

```
- real 123;      (* real here is a function *)  
val it = 123.0 : real  
- floor 3.6;  
val it = 3 : int  
- str #"a";  
val it = "a" : string
```

Ενσωματωμένες συναρτήσεις μετατροπής τύπων:

- `real (int → real)`,
- `floor (real → int)`, `ceil (real → int)`,
- `round (real → int)`, `trunc (real → int)`,
- `ord (char → int)`,
- `chr (int → char)`,
- `str (char → string)`

# Σύνταξη ταιριάσματος

---

- Ένας **κανόνας** έχει την παρακάτω σύνταξη στην ML:

$$\langle rule \rangle ::= \langle pattern \rangle \Rightarrow \langle expression \rangle$$

- Ένα **ταίριασμα** αποτελείται από έναν ή περισσότερους κανόνες που διαχωρίζονται μεταξύ τους από ' | ' :

$$\langle match \rangle ::= \langle rule \rangle \mid \langle rule \rangle \mid \langle match \rangle$$

- Σε ένα ταίριασμα κάθε κανόνας πρέπει να έχει τον ίδιο τύπο με την έκφραση (*expression*) στο δεξί μέρος του κανόνα
- Ένα ταίριασμα δεν είναι έκφραση από μόνο του, αλλά αποτελεί μέρος διαφόρων εκφράσεων της ML

# Εκφράσεις case

---

```
- case 1+1 of
=   3 => "three"
=   | 2 => "two"
=   | _ => "hmmm...";
val it = "two" : string
```

- Έχουν τη σύνταξη:

```
<case-expr> ::= case <expression> of <match>
```

- Η έκφραση **case** της ML είναι μια πολύ ισχυρή δομή—και αντίθετα με τις περισσότερες άλλες γλώσσες, μπορεί να κάνει περισσότερα από απλή σύγκριση με σταθερές

# Παράδειγμα χρήσης `case`

---

```
case list of
  | _ :: _ :: c :: _ => c
  | _ :: b :: _    => b
  | a :: _        => a
  | nil          => 0
```

- Η τιμή αυτής της έκφρασης είναι:
  - το τρίτο στοιχείο της λίστας `list`, αν η λίστα έχει τουλάχιστον τρία στοιχεία, ή
  - το δεύτερο στοιχείο της λίστας αν η λίστα έχει μόνο δύο στοιχεία
  - το πρώτο στοιχείο της λίστας `list` αν έχει μόνο ένα, ή
  - ο ακέραιος `0` αν η λίστα `list` είναι κενή
- Λόγω του τελευταίου κανόνα, η λίστα πρέπει να είναι μια λίστα ακεραίων



# Η έκφραση `case` είναι μια γενίκευση της `if`

---

```
if  $exp_1$  then  $exp_2$  else  $exp_3$ 
```

```
case  $exp_1$  of  
  true =>  $exp_2$   
 | false =>  $exp_3$ 
```

Οι δύο παραπάνω εκφράσεις είναι ισοδύναμες

Με άλλα λόγια, η έκφραση `if-then-else` είναι ειδική περίπτωση μιας έκφρασης `case`

# Αποτίμηση “βραχυκύκλωσης” στην ML

---

```
- true or else 1 div 0 = 0;  
val it = true : bool
```

- Οι τελεστές `andalso` και `orelse` “βραχυκυκλώνουν” (short-circuit) στην ML:
  - Εάν η έκφραση του πρώτου ορίσματος του `orelse` αποτιμάται ως αληθής (`true`), η έκφραση του δεύτερου δεν αποτιμάται
  - Παρόμοια, εάν το πρώτο όρισμα του `andalso` είναι ψευδές
- Με βάση το “γράμμα” της θεωρίας, δεν είναι πραγματικοί τελεστές αλλά λέξεις κλειδιά
- Αυτό διότι, σε μια πρόθυμη (eager) γλώσσα σαν την ML, όλοι οι τελεστές αποτιμούν πλήρως τα ορίσματά τους

# Πολυμορφικές συναρτήσεις για λίστες

---

- Αναδρομική συνάρτηση που υπολογίζει το μήκος μιας λίστας (οποιοδήποτε τύπου)

```
- fun length x =  
=   if null x then 0  
=   else 1 + length (tl x);  
val length = fn : 'a list -> int  
- length [true,false,true];  
val it = 3 : int  
- length [4.0,3.0,2.0,1.0];  
val it = 4 : int
```

Σημείωση: η συνάρτηση `length` είναι μέρος της ML, οπότε ο παραπάνω ορισμός είναι περιττός

# Πολυμορφισμός για τύπους ισότητας

```
- fun length_eq x =  
=   if x = [] then 0  
=   else 1 + length_eq (tl x);  
val length_eq = fn : 'a list -> int  
- length_eq [true,false,true];  
val it = 3 : int  
- length_eq [4.0,3.0,2.0,1.0];  
Error: operator and operand don't agree  
[equality type required]
```

- Μεταβλητές τύπων που αρχίζουν με δύο αποστρόφους, όπως ο `'a`, περιορίζονται σε τύπους ισότητας
- Η ML συμπεραίνει αυτόν τον περιορισμό διότι συγκρίναμε τη μεταβλητή `x` για ισότητα με την κενή λίστα. Αυτό δε θα συνέβαινε εάν είχαμε χρησιμοποιήσει τη συνθήκη `null x` αντί για την `x=[]`.

# Αποδοτικές συναρτήσεις για λίστες

---

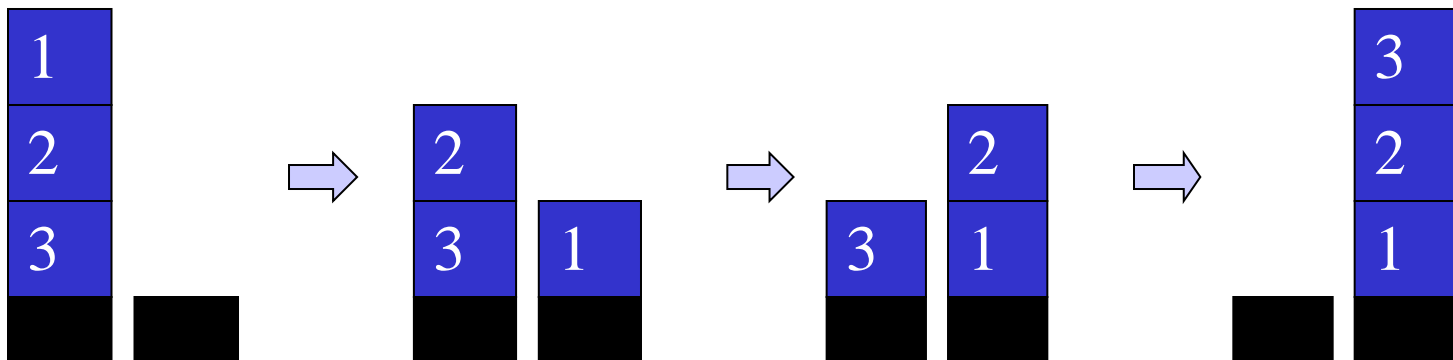
- Αναστροφή μιας λίστας

```
fun reverse nil = nil  
  | reverse (x::xs) = (reverse xs) @ [x]
```

- Ερωτήσεις:
  - Είναι σωστή η παραπάνω υλοποίηση της συνάρτησης `reverse`;
  - Πόσο αποδοτική είναι;
  - Μπορούμε να αναστρέψουμε μια λίστα με ένα μόνο πέρασμα;

# Πιο αποδοτική συνάρτηση `reverse`

```
fun reverse xs =  
  let  
    fun rev (nil, z) = z  
      | rev (y::ys, z) = rev (ys, y::z)  
  in  
    rev (xs, nil)  
  end
```



# Συναρτήσεις Υψηλής Τάξης

# Η λέξη κλειδί `op`

---

```
- op *;  
val it = fn : int * int -> int  
- quicksort ([1,4,3,2,5], op <);  
val it = [1,2,3,4,5] : int list
```

- Οι δυαδικοί τελεστές είναι ειδικές συναρτήσεις
- Όμως μερικές φορές θέλουμε να τους χρησιμοποιήσουμε ως κοινές συναρτήσεις: για παράδειγμα, να περάσουμε τον τελεστή `<` σαν όρισμα τύπου `int * int -> bool`
- Η λέξη κλειδί `op` πριν από κάποιον τελεστή επιστρέφει την αντίστοιχη συνάρτηση



# Συναρτήσεις υψηλής τάξης

---

- Κάθε συνάρτηση έχει μία **τάξη** (order):
  - Μια συνάρτηση που δεν παίρνει άλλες συναρτήσεις ως παραμέτρους και δεν επιστρέφει ως αποτέλεσμα μια άλλη συνάρτηση έχει **τάξη 1**
  - Μια συνάρτηση που παίρνει άλλες συναρτήσεις ως παραμέτρους ή επιστρέφει ως αποτέλεσμα μια άλλη συνάρτηση έχει **τάξη  $n+1$** , όπου  $n$  είναι η μέγιστη τάξη των παραμέτρων της και του αποτελέσματός της
- Η συνάρτηση `quicksort` που μόλις είδαμε είναι συνάρτηση δεύτερης τάξης

```
- quicksort;  
val it = fn :  
  'a list * ('a * 'a -> bool) -> 'a list
```

# Πρακτική εξάσκηση

---

- Τι τάξεως είναι οι συναρτήσεις της ML με τους παρακάτω τύπους;

```
int * int -> bool
```

```
int list * (int * int -> bool) -> int list
```

```
int -> int -> int
```

```
(int -> int) * (int -> int) -> (int -> int)
```

```
int -> bool -> real -> string
```

- Τι μπορούμε να πούμε για την τάξη της συνάρτησης με τον παρακάτω τύπο;

```
('a -> 'b) * ('c -> 'a) -> 'c -> 'b
```

# Προκαθορισμένες συναρτήσεις υψηλής τάξης

---

- Τρεις σημαντικές προκαθορισμένες συναρτήσεις υψηλής τάξης:
  1. `map`
  2. `foldr`
  3. `foldl`
- Η `foldr` και η `foldl` είναι παρόμοιες

# Η συνάρτηση map

- Εφαρμόζει μια συνάρτηση σε κάθε στοιχείο μιας λίστας και επιστρέφει τα αποτελέσματα της εφαρμογής σε μια νέα λίστα

```
- map ~ [1,2,3,4];  
val it = [~1,~2,~3,~4] : int list  
- map (fn x => x+1) [1,2,3,4];  
val it = [2,3,4,5] : int list  
- map (fn x => x mod 2 = 0) [1,2,3,4];  
val it = [false,true,false,true] : bool list  
- map (op +) [(1,2),(3,4),(5,6)];  
val it = [3,7,11] : int list  
- val f = map (op +);  
val f = fn : (int * int) list -> int list  
- f [(1,2),(3,4)];  
val it = [3,7] : int list
```

# Η συνάρτηση `foldr`

---

- Συνδυάζει, μέσω μιας συνάρτησης, όλα τα στοιχεία μιας λίστας
- Παίρνει ως ορίσματα μια συνάρτηση  $f$ , μια αρχική τιμή  $c$ , και μια λίστα  $x = [x_1, \dots, x_n]$  και υπολογίζει την τιμή:

$$f(x_1, f(x_2, \dots f(x_{n-1}, f(x_n, c)) \dots ))$$

- Για παράδειγμα η κλήση:

```
foldr (op +) 0 [1,2,3,4]
```

αποτιμάται σε  $1 + (2 + (3 + (4 + 0))) = 10$

# Παραδείγματα χρήσης foldr

```
- foldr (op +) 0 [1,2,3,4];
val it = 10 : int
- foldr (op * ) 1 [1,2,3,4];
val it = 24 : int
- foldr (op ^) "" ["abc","def","ghi"];
val it = "abcdefghijklm" : string
- foldr (op ::) [5] [1,2,3,4];
val it = [1,2,3,4,5] : int list
- foldr;
val it = fn : ('a * 'b -> 'b) -> 'b -> 'a list -> 'b
- foldr (op +);
val it = fn : int -> int list -> int
- foldr (op +) 0;
val it = fn : int list -> int
- val addup = foldr (op +) 0;
val addup = fn : int list -> int
- addup [1,2,3,4,5];
val it = 15 : int
```

# Η συνάρτηση `foldl`

---

- Συνδυάζει, μέσω μιας συνάρτησης, όλα τα στοιχεία μιας λίστας (όπως η `foldr`)
- Παίρνει ως ορίσματα μια συνάρτηση  $f$ , μια αρχική τιμή  $c$ , και μια λίστα  $x = [x_1, \dots, x_n]$  και υπολογίζει την τιμή:

$$f(x_n, f(x_{n-1}, \dots f(x_2, f(x_1, c)) \dots ))$$

- Για παράδειγμα η κλήση:

```
foldl (op +) 0 [1,2,3,4]
```

αποτιμάται σε  $4 + (3 + (2 + (1 + 0))) = 10$

Σημείωση: Η `foldr` αποτιμήθηκε ως  $1 + (2 + (3 + (4 + 0))) = 10$

# Παραδείγματα χρήσης `foldl`

- Η `foldl` αρχίζει από αριστερά, η `foldr` από τα δεξιά
- Φυσικά, δεν υπάρχει κάποια διαφορά όταν η συνάρτηση είναι αντιμεταθετική και προσεταιριστική, όπως οι `+` και `*`
- Για άλλες συναρτήσεις όμως υπάρχει διαφορά

```
- foldr (op ^) "" ["abc", "def", "ghi"];
val it = "abcdefghi" : string
- foldl (op ^) "" ["abc", "def", "ghi"];
val it = "ghidefabc" : string
- foldr (op -) 0 [1,2,3,4];
val it = ~2 : int
- foldl (op -) 0 [1,2,3,4];
val it = 2 : int
```



# Δηλώσεις Τύπων Δεδομένων

# Ορισμοί τύπων δεδομένων

---

- Προκαθορισμένος τύπος, αλλά όχι πρωτόγονος στην ML

```
datatype bool = true | false
```

- Παραμετρικός κατασκευαστής τύπου (parametric type constructor) για λίστες:

```
datatype 'e list = nil  
                | :: of 'e * 'e list
```

- Ορίζεται για την ML στην ML!

# Ορισμοί τύπων δεδομένων

---

- Έχουν τη γενική μορφή

```
datatype <name> = <clause> | ... | <clause>  
<clause> ::= <constructor> | <constructor> of <type>
```

- Παραδείγματα:

- `datatype color = Red | Yellow | Green`

- στοιχεία: `Red`, `Yellow`, και `Green`

- `datatype atom = Atm of string | Nbr of int`

- στοιχεία: `Atm("a")`, `Atm("b")`, ..., `Nbr(0)`, `Nbr(1)`, ...

- `datatype list = Nil | Cons of atom * list`

- στοιχεία: `Nil`, `Cons (Atm "a", Nil)`, ...

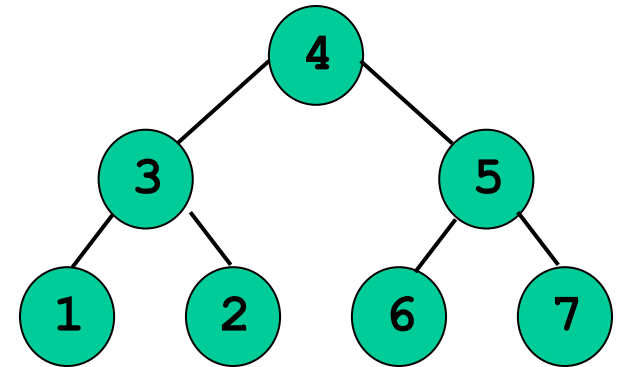
- `Cons (Nbr 2, Cons (Atm "ugh", Nil))`, ...

# Ορισμοί αναδρομικών τύπων δεδομένων

```
datatype 'd tree = Leaf of 'd  
                | Node of 'd * 'd tree * 'd tree
```

- Παράδειγμα στιγμιότυπου δένδρου

```
Node (4, Node (3, Leaf (1), Leaf (2)),  
      Node (5, Leaf (6), Leaf (7)))
```



- Αναδρομική συνάρτηση χρήσης του τύπου δεδομένων

```
fun sum (Leaf n) = n  
    | sum (Node (n, t1, t2)) = n + sum(t1) + sum(t2)
```

# Αυστηρό σύστημα τύπων

---

```
- datatype flip = Heads | Tails;
datatype flip = Heads | Tails
- fun isHeads x = (x = Heads);
val isHeads = fn : flip -> bool
- isHeads Tails;
val it = false : bool
- isHeads Mon;
Error: operator and operand don't agree [tycon mismatch]
  operator domain: flip
  operand:         day
```

- Η ML είναι αυστηρή σε σχέση με τους νέους τύπους, ακριβώς όπως θα περιμέναμε
- Σε αντίθεση π.χ. με τις `enum` δηλώσεις της C, οι λεπτομέρειες της υλοποίησης δεν είναι εμφανείς στον προγραμματιστή

# Κατασκευαστές έναντι συναρτήσεων

```
- datatype exint = Value of int | PlusInf | MinusInf;  
datatype exint = MinusInf | PlusInf | Value of int  
- PlusInf;  
val it = PlusInf : exint  
- MinusInf;  
val it = MinusInf : exint  
- Value;  
val it = fn : int -> exint  
- Value 42;  
val it = Value 42 : exint
```

- Ο `Value` είναι ένας κατασκευαστής δεδομένων με μία παράμετρο: την τιμή του ακεραίου `int` που αποθηκεύει
- Δείχνει σε συνάρτηση που παίρνει έναν ακέραιο (`int`) και επιστρέφει έναν `exint` που περιέχει τον ακέραιο

# Όμως ένας `Value` δεν είναι `int`

---

```
- val x = Value 42;  
val x = Value 42 : exint  
- x + x;  
Error: overloaded variable not defined at type symbol: +  
type: exint
```

- Ένας `Value 42` είναι ένας `exint`, όχι ένας ακέραιος (`int`), παρότι εμπεριέχει έναν
- Μπορούμε να ανακτήσουμε τις παραμέτρους ενός κατασκευαστή χρησιμοποιώντας ταίριασμα προτύπων
- Κατά συνέπεια, ο κατασκευαστής `Value` δεν είναι συνάρτηση: οι κανονικές συναρτήσεις δε μπορούν να χρησιμοποιηθούν με αυτόν τον τρόπο ως πρότυπα

# Κατασκευαστές και ταίριασμα προτύπων

```
- fun square PlusInf = PlusInf
=   | square MinusInf = PlusInf
=   | square (Value x) = Value (x*x);
val square = fn : exint -> exint
- square MinusInf;
val it = PlusInf : exint
- square (Value 3);
val it = Value 9 : exint
```

- Διαχειριζόμαστε νέους τύπους δεδομένων με συναρτήσεις σαν την παραπάνω που ορίζονται μέσω ταίριασματος προτύπων
- Επειδή ένας `exint` είναι είτε `PlusInf`, ή `MinusInf`, ή `Value`, η παραπάνω συνάρτηση είναι εξαντλητική ως προς το ταίριασμα προτύπων



# Χειρισμός εξαιρέσεων στην ML

---

- Μέσω ταιριάσματος προτύπων μπορούμε επίσης να χειριστούμε εξαιρέσεις

```
- fun square PlusInf = PlusInf
=   | square MinusInf = PlusInf
=   | square (Value x) = Value (x*x)
=       handle Overflow => PlusInf;
val square = fn : exint -> exint
- square (Value 10000);
val it = Value 100000000 : exint
- square (Value 100000);
val it = PlusInf : exint
```

- Θα δούμε περισσότερα για τις εξαιρέσεις στη Java

# Ένα ακόμα παράδειγμα: bunch

---

```
datatype 'x bunch =  
  One of 'x  
  | Group of 'x list
```

- Ένα 'x bunch είναι είτε ένα πράγμα τύπου 'x, είτε μια λίστα από πράγματα τύπου 'x
- Όπως συνήθως, η ML συμπεραίνει τύπους αυτόματα:

```
- One 1.0;  
val it = One 1.0 : real bunch  
- Group [true,false];  
val it = Group [true,false] : bool bunch
```

# Παράδειγμα: Πολυμορφικός συμπερασμός

---

- Η ML μπορεί να συμπεράνει πολυμορφικούς `bunch` τύπους, αλλά δεν χρειάζεται πάντα να τους επιλύσει πλήρως, όπως για παράδειγμα συμβαίνει όταν σε αυτούς περιλαμβάνονται λίστες

```
- fun size (One _) = 1
=   | size (Group xs) = length xs;
val size = fn : 'a bunch -> int
- size (One 3.14);
val it = 1 : int
- size (Group [true,false]);
val it = 2 : int
```

# Παράδειγμα: Μη πολυμορφικός συμπερασμός

```
- fun sum (One x) = x
=   | sum (Group xs) = foldr (op +) 0 xs;
val sum = fn : int bunch -> int
- sum (One 5);
val it = 5 : int
- sum (Group [1,2,3]);
val it = 6 : int
```

- Χρησιμοποιήσαμε τον τελεστή + (ως όρισμα της `foldr`) στα στοιχεία της λίστας
- Κατά συνέπεια, η ML μπορεί να συμπεράνει ότι ο τύπος της παραμέτρου της συνάρτησης `sum` είναι `int bunch`


# Αυτή ήταν η ML

---

- ... ή τουλάχιστον, όλη η ML που θα δούμε στις διαλέξεις
- Φυσικά, υπάρχουν κάποια μέρη ακόμα:
  - Εγγραφές (**records**) που είναι σαν τις πλειάδες αλλά έχουν πεδία με ονόματα
    - π.χ. `{name="Arnold", age=42} : {name : string, age : int}`
  - Πίνακες (**arrays**) με στοιχεία που μπορούν να τροποποιηθούν
  - Αναφορές (**references**) για τιμές που μπορούν να τροποποιηθούν
  - Χειρισμός εξαιρέσεων (**exception handling**)
  - Υποστήριξη encapsulation και απόκρυψης δεδομένων:
    - **structures**: συλλογές από τύπους δεδομένων + συναρτήσεων
    - **signatures**: διαπροσωπίες (interfaces) για τα structures
    - **functors**: κάτι σα συναρτήσεις για structures, που όμως επιτρέπουν μεταβλητές τύπων και την ανάθεση τιμών (instantiation) στις παραμέτρους των structures

# Κάποια άλλα μέρη της ML

---

- API: the standard basis
  - Προκαθορισμένες συναρτήσεις, τύποι, κ.λπ.
  - Κάποιες από αυτές είναι σε structures: `Int.maxInt`, `Real.Math.sqrt`, `List.nth`, κ.λπ.
- eXene: μια βιβλιοθήκη της ML για εφαρμογές σε γραφικό περιβάλλον X windows
- Ο Compilation Manager για διαχείριση μεγαλύτερων projects
- Άλλες διάλεκτοι της ML
  - Objective Caml (OCaml) 
  - Η επέκταση της ML για ταυτοχρονισμό (Concurrent ML - CML)

# Συμπερασματικά για τις συναρτησιακές γλώσσες

---

- Η ML είναι η μόνη γλώσσα που θα εξετάσουμε από τις συναρτησιακές γλώσσες προγραμματισμού
- Σε αυτό το είδος προγραμματισμού, η εκτέλεση γίνεται μέσω αποτίμησης εκφράσεων και ταιριάσματος προτύπων
- Εάν σας αρέσει αυτό το στυλ προγραμματισμού, υπάρχουν και άλλες συναρτησιακές γλώσσες για εξερεύνηση, όπως η Lisp, η Scheme/Racket, η Haskell, η Clean και η Erlang