

Η γλώσσα ML σε βάθος



Joan Miró, *El Carnaval del Arlequín*, 1925

Κωστής Σαγώνας <kostis@cs.ntua.gr>

Τι σημαίνουν οι τύποι συναρτήσεων στην ML

- $f : A \rightarrow B$ σημαίνει:
 - Για κάθε $x \in A$,

$$f(x) = \begin{cases} \text{για κάποιο στοιχείο } y = f(x) \in B \\ \text{ατέρμονη εκτέλεση} \\ \text{η εκτέλεση τερματίζει εγείροντας κάποια εξαίρεση} \end{cases}$$

- Με λόγια:
 - “εάν η αποτίμηση $f(x)$ τερματίζει κανονικά, τότε $f(x) \in B$ ”
- Δηλαδή, η πρόσθεση δε θα εκτελεστεί σε μια έκφραση της μορφής $f(x) + 3$ εάν η $f(x)$ εγείρει κάποια εξαίρεση

Η γλώσσα ML σε βάθος

2

Επισημειώσεις τύπων (type annotations)

```
- fun prod (a,b) = a*b;
val prod = fn : int * int -> int
```

- Γιατί `int` και όχι `real`;
- Διότι ο προεπιλεγμένος τύπος (default type) του αριθμητικού τελεστή `*` (όπως και των `+`, `-`) είναι


```
int * int -> int
```
- Αν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση με ορίσματα τύπου `real` μπορούμε να βάλουμε μια υποσημείωση τύπου στα συγκεκριμένα ορίσματα

Η γλώσσα ML σε βάθος

3

Παράδειγμα επισημειώσεων τύπων στην ML

```
- fun prod (a:real,b:real):real = a*b;
val prod = fn : real * real -> real
```

- Οι επισημειώσεις τύπων αποτελούνται από μια άνω κάτω τελεία και έναν τύπο και μπορούν να μπουν παντού
- Όλοι τα παρακάτω ορισμοί είναι ισοδύναμοι:


```
fun prod (a,b):real = a * b;
fun prod (a:real,b) = a * b;
fun prod (a,b:real) = a * b;
fun prod (a,b) = (a:real) * b;
fun prod (a,b) = a * b:real;
fun prod (a,b) = (a*b):real;
fun prod ((a,b):real * real) = a*b;
```

Η γλώσσα ML σε βάθος

4

Συναρτήσεις μετατροπής τύπων

```
- real 123;
val it = 123.0 : real
- floor 3.6;
val it = 3 : int
- str #"a";
val it = "a" : string
```

Ενσωματωμένες συναρτήσεις μετατροπής τύπων:

- `real (int → real)`,
- `floor (real → int)`, `ceil (real → int)`,
- `round (real → int)`, `trunc (real → int)`,
- `ord (char → int)`,
- `chr (int → char)`,
- `str (char → string)`

Η γλώσσα ML σε βάθος

5

Σύνταξη ταιριάσματος

- Ένας **κανόνας** έχει την παρακάτω σύνταξη στην ML:

```
<rule> ::= <pattern> => <expression>
```

- Ένα **ταιρίασμα** αποτελείται από έναν ή περισσότερους κανόνες που διαχωρίζονται μεταξύ τους από `'|'`:

```
<match> ::= <rule> | <rule> '|' <match>
```

- Σε ένα ταιρίασμα κάθε κανόνας πρέπει να έχει τον ίδιο τύπο με την έκφραση (*expression*) στο δεξί μέρος του κανόνα
- Ένα ταιρίασμα δεν είναι έκφραση από μόνο του, αλλά αποτελεί μέρος διαφόρων εκφράσεων της ML

Η γλώσσα ML σε βάθος

6

Εκφράσεις case

```
- case 1+1 of
=   3 => "three" |
=   2 => "two"   |
=   _ => "hmmm...";
val it = "two" : string
```

- Έχουν τη σύνταξη:

```
<case-expr> ::= case <expression> of <match>
```

- Η έκφραση **case** της ML είναι μια πολύ ισχυρή δομή—και αντίθετα με τις περισσότερες άλλες γλώσσες, μπορεί να κάνει περισσότερα από απλή σύγκριση με σταθερές

Η γλώσσα ML σε βάθος

7

Παράδειγμα χρήσης case

```
case list of
_::_:c::_ => c |
_::b::_ => b |
a::_ => a |
nil => 0
```

- Η τιμή αυτής της έκφρασης είναι:
 - το τρίτο στοιχείο της λίστας `list`, αν η λίστα έχει τουλάχιστον τρία στοιχεία, ή
 - το δεύτερο στοιχείο της λίστας αν έχει μόνο δύο, ή
 - το πρώτο στοιχείο της λίστας `list` εάν έχει μόνο ένα, ή
 - ο ακέραιος 0 εάν η λίστα `list` είναι κενή.

Η γλώσσα ML σε βάθος

8

Η έκφραση case είναι μια γενίκευση της if

```
if exp1 then exp2 else exp3
```

```
case exp1 of
true => exp2 |
false => exp3
```

Οι δύο παραπάνω εκφράσεις είναι ισοδύναμες

Με άλλα λόγια, ένα **if-then-else** είναι μια ειδική περίπτωση ενός **case**

Η γλώσσα ML σε βάθος

9

Αποτίμηση “βραχυκύκλωσης” στην ML

```
- true orelse 1 div 0 = 0;
val it = true : bool
```

- Οι τελεστές **andalso** και **orelse** “βραχυκυκλώνουν” (short-circuit) στην ML:
 - Εάν η έκφραση του πρώτου ορίσματος του **orelse** αποτιμάται ως αληθής (true), η έκφραση του δεύτερου δεν αποτιμάται
 - Παρόμοια, εάν το πρώτο όρισμα του **andalso** είναι ψευδές
- Με βάση το “γράμμα” της θεωρίας, δεν είναι πραγματικοί τελεστές αλλά λέξεις κλειδιά
- Αυτό διότι, σε μια γλώσσα σαν την ML, όλοι οι τελεστές αποτιμούν πλήρως τα ορίσματά τους

Η γλώσσα ML σε βάθος

10

Πολυμορφικές συναρτήσεις για λίστες

- Αναδρομική συνάρτηση που υπολογίζει το μήκος μιας λίστας (οπουδήποτε τύπου)

```
- fun length x =
=   if null x then 0
=   else 1 + length (tl x);
val length = fn : 'a list -> int
- length [true,false,true];
val it = 3 : int
- length [4.0,3.0,2.0,1.0];
val it = 4 : int
```

Σημείωση: η συνάρτηση `length` είναι μέρος της ML, οπότε ο παραπάνω ορισμός είναι περιττός

Η γλώσσα ML σε βάθος

11

Πολυμορφισμός για τύπους ισότητας

```
- fun length_eq x =
=   if x=[] then 0
=   else 1 + length_eq (tl x);
val length_eq = fn : 'a list -> int
- length_eq [true,false,true];
val it = 3 : int
- length_eq [4.0,3.0,2.0,1.0];
Error: operator and operand don't agree
[equality type required]
```

- Μεταβλητές τύπων που αρχίζουν με δύο αποστρόφους, όπως ο `'a`, περιορίζονται σε τύπους ισότητας
- Η ML συμπεραίνει αυτόν τον περιορισμό διότι συγκρίναμε τη μεταβλητή `x` για ισότητα με την κενή λίστα. Αυτό δε θα σύμβαινε εάν είχαμε χρησιμοποιήσει τη συνθήκη `null x` αντί για την `x=[]`

Η γλώσσα ML σε βάθος

12

Αποδοτικές συναρτήσεις για λίστες

- Αναστροφή μιας λίστας

```
fun reverse nil = nil
  | reverse (x::xs) = (reverse xs) @ [x];
```

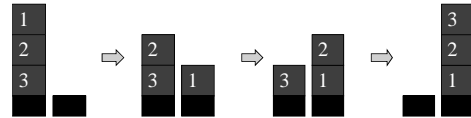
- Ερωτήσεις:
 - Πόσο αποδοτική είναι η συνάρτηση `reverse`?
 - Μπορούμε να αναστρέψουμε μια λίστα με ένα μόνο πέρασμα;

Η γλώσσα ML σε βάθος

13

Πιο αποδοτική συνάρτηση `reverse`

```
fun reverse xs
  let
    fun rev (nil, z) = z
      | rev (y::ys, z) = rev (ys, y::z)
  in
    rev (xs, nil)
  end;
```



Η γλώσσα ML σε βάθος

14

Συναρτήσεις Υψηλής Τάξης

Η γλώσσα ML σε βάθος

15

Η λέξη κλειδί `op`

```
- op *;
val it = fn : int * int -> int
- quicksort ([1,4,3,2,5], op <);
val it = [1,2,3,4,5] : int list
```

- Οι δυαδικοί τελεστές είναι ειδικές συναρτήσεις
- Όμως μερικές φορές θέλουμε να τις χρησιμοποιήσουμε σαν κοινές συναρτήσεις: για παράδειγμα, να περάσουμε τον τελεστή `<` σαν όρισμα τύπου `int * int -> bool`
- Η λέξη κλειδί `op` πριν από κάποιο τελεστή επιστρέφει τη αντίστοιχη συνάρτηση

Η γλώσσα ML σε βάθος

16

Συναρτήσεις υψηλής τάξης

- Κάθε συνάρτηση έχει μία **τάξη** (order):
 - Μια συνάρτηση που δεν παίρνει άλλες συναρτήσεις ως παραμέτρους και δεν επιστρέφει ως αποτέλεσμα μια άλλη συνάρτηση έχει τάξη 1
 - Μια συνάρτηση που παίρνει άλλες συναρτήσεις ως παραμέτρους ή επιστρέφει ως αποτέλεσμα μια άλλη συνάρτηση έχει τάξη $n+1$, όπου n είναι η μέγιστη τάξη των παραμέτρων της και του αποτελέσματός της
- Η συνάρτηση `quicksort` που μόλις είδαμε είναι συνάρτηση δεύτερης τάξης

Η γλώσσα ML σε βάθος

17

Πρακτική εξάσκηση

- Τι τάξεως είναι οι συναρτήσεις της ML με τους παρακάτω τύπους;


```
int * int -> bool
int list * (int * int -> bool) -> int list
int -> int -> int
(int -> int) * (int -> int) -> (int -> int)
int -> bool -> real -> string
```
- Τι μπορούμε να πούμε για την τάξη της συνάρτησης με τον παρακάτω τύπο;


```
('a -> 'b) * ('c -> 'a) -> 'c -> 'b
```

Η γλώσσα ML σε βάθος

18

Προκαθορισμένες συναρτήσεις υψηλής τάξης

- Τρεις σημαντικές προκαθορισμένες συναρτήσεις υψηλής τάξης:
 1. `map`
 2. `foldr`
 3. `foldl`
- Η `foldr` και η `foldl` είναι παρόμοιες

Η γλώσσα ML σε βάθος

19

Η συνάρτηση `map`

- Εφαρμόζει μια συνάρτηση σε κάθε στοιχείο μιας λίστας και επιστρέφει τα αποτελέσματα της εφαρμογής σε μια νέα λίστα

```
- map ~ [1,2,3,4];
val it = [~1,~2,~3,~4] : int list
- map (fn x => x+1) [1,2,3,4];
val it = [2,3,4,5] : int list
- map (fn x => x mod 2 = 0) [1,2,3,4];
val it = [false,true,false,true] : bool list
- map (op +) [(1,2),(3,4),(5,6)];
val it = [3,7,11] : int list
- val f = map (op +);
val f = fn : (int * int) list -> int list
- f [(1,2),(3,4)];
val it = [3,7] : int list
```

Η γλώσσα ML σε βάθος

20

Η συνάρτηση `foldr`

- Συνδυάζει, μέσω μιας συνάρτησης, όλα τα στοιχεία μιας λίστας
- Παίρνει ως ορίσματα μια συνάρτηση f , μια αρχική τιμή c , και μια λίστα $x = [x_1, \dots, x_n]$ και υπολογίζει την τιμή:

$$f(x_n, f(x_{n-1}, \dots f(x_2, f(x_1, c)) \dots))$$

- Για παράδειγμα η κλήση:

```
foldr (op +) 0 [1,2,3,4]
αποτιμάται σε 1+(2+(3+(4+0)))=10
```

Η γλώσσα ML σε βάθος

21

Παραδείγματα χρήσης `foldr`

```
- foldr (op +) 0 [1,2,3,4];
val it = 10 : int
- foldr (op * ) 1 [1,2,3,4];
val it = 24 : int
- foldr (op ^) "" ["abc","def","ghi"];
val it = "abcdefghi" : string
- foldr (op ::) [5] [1,2,3,4];
val it = [1,2,3,4,5] : int list
- foldr;
val it = fn : ('a * 'b -> 'b) -> 'b -> 'a list -> 'b
- foldr (op +);
val it = fn : int -> int list -> int
- foldr (op +) 0;
val it = fn : int list -> int
- val addup = foldr (op +) 0;
val addup = fn : int list -> int
- addup [1,2,3,4,5];
val it = 15 : int
```

Η γλώσσα ML σε βάθος

22

Η συνάρτηση `foldl`

- Συνδυάζει, μέσω μιας συνάρτησης, όλα τα στοιχεία μιας λίστας (όπως η `foldr`)
- Παίρνει ως ορίσματα μια συνάρτηση f , μια αρχική τιμή c , και μια λίστα $x = [x_1, \dots, x_n]$ και υπολογίζει την τιμή:

$$f(x_n, f(x_{n-1}, \dots f(x_2, f(x_1, c)) \dots))$$

- Για παράδειγμα η κλήση:

```
foldl (op +) 0 [1,2,3,4]
αποτιμάται σε 4+(3+(2+(1+0)))=10
```

Σημείωση: Η `foldr` αποτιμήθηκε ως $1+(2+(3+(4+0)))=10$

Η γλώσσα ML σε βάθος

23

Παραδείγματα χρήσης `foldl`

- Η `foldl` αρχίζει από αριστερά, η `foldr` από τα δεξιά
- Φυσικά, δεν υπάρχει κάποια διαφορά όταν η συνάρτηση είναι ανακλαστική και μεταβατική, όπως η $+$ και η $*$
- Για άλλες συναρτήσεις όμως υπάρχει διαφορά

```
- foldr (op ^) "" ["abc","def","ghi"];
val it = "abcdefghi" : string
- foldl (op ^) "" ["abc","def","ghi"];
val it = "ghidefab" : string
- foldr (op -) 0 [1,2,3,4];
val it = ~2 : int
- foldl (op -) 0 [1,2,3,4];
val it = 2 : int
```

Η γλώσσα ML σε βάθος

24

Δηλώσεις Τύπων Δεδομένων

Η γλώσσα ML σε βάθος

25

Ορισμοί τύπων δεδομένων

- Προκαθορισμένος τύπος, αλλά όχι πρωτόγονος στην ML

```
datatype bool = true | false;
```

- Παραμετρικός κατασκευαστής τύπου (parametric type constructor) για λίστες:

```
datatype 'e list = nil
| :: of 'e * 'e list
```

- Ορίζεται για την ML στην ML!

Η γλώσσα ML σε βάθος

26

Ορισμοί τύπων δεδομένων

- Έχουν τη γενική μορφή

```
datatype <name> = <clause> | ... | <clause>
<clause> ::= <constructor> | <constructor> of <type>
```

- Παραδείγματα:

- datatype color = Red | Yellow | Blue
 - στοιχεία: Red, Yellow, και Blue
- datatype atom = Atm of string | Nmbr of int
 - στοιχεία: Atm("a"), Atm("b"), ..., Nmbr(0), Nmbr(1), ...
- datatype list = Nil | Cons of atom * list
 - στοιχεία: Nil, Cons(Atm("a"), Nil), ...
 - Cons(Nmbr(2), Cons(Atm("ugh"), Nil)), ...

Η γλώσσα ML σε βάθος

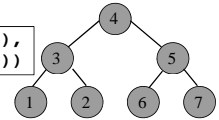
27

Ορισμοί αναδρομικών τύπων δεδομένων

```
datatype 'd tree = Leaf of 'd
| Node of 'd * 'd tree * 'd tree;
```

- Παράδειγμα στιγμιότυπου δένδρου

```
Node(4, Node(3, Leaf(1), Leaf(2)),
Node(5, Leaf(6), Leaf(7)))
```



- Αναδρομική συνάρτηση χρήσης του τύπου δεδομένων

```
fun sum (Leaf n) = n
| sum (Node (n,t1,t2)) = n + sum(t1) + sum(t2);
```

Η γλώσσα ML σε βάθος

28

Αυστηρό σύστημα τύπων

```
- datatype flip = Heads | Tails;
datatype flip = Heads | Tails;
- fun isHeads x = (x = Heads);
val isHeads = fn : flip -> bool
- isHeads Tails;
val it = false : bool
- isHeads Mon;
Error: operator and operand don't agree [tycon mismatch]
operator domain: flip
operand:      day
```

- Η ML είναι αυστηρή σε σχέση με τους νέους τύπους, ακριβώς όπως θα περιμέναμε
- Σε αντίθεση π.χ. με τις `enum` δηλώσεις της C, οι λεπτομέρειες της υλοποίησης δεν είναι εμφανείς στον προγραμματιστή

Η γλώσσα ML σε βάθος

29

Κατασκευαστές έναντι συναρτήσεων

```
- datatype exint = Value of int | PlusInf | MinusInf;
datatype exint = MinusInf | PlusInf | Value of int
- PlusInf;
val it = PlusInf : exint
- MinusInf;
val it = MinusInf : exint
- Value;
val it = fn : int -> exint
- Value 3;
val it = Value 3 : exint
```

- Ο `Value` είναι ένας κατασκευαστής δεδομένων με μία παράμετρο: την τιμή του ακεραίου `int` που αποθηκεύει
- Δείχνει σε συνάρτηση που παίρνει έναν ακεραίο (`int`) και επιστρέφει έναν `exint` που περιέχει τον ακεραίο

Η γλώσσα ML σε βάθος

30

Όμως ένας value δεν είναι int

```
- val x = Value 5;
val x = Value 5 : exint
- x + x;
Error: overloaded variable not defined at type symbol: +
type: exint
```

- Ένας value 5 είναι ένας exint, όχι ένας ακέραιος (int), παρότι εμπεριέχει έναν
- Μπορούμε να ανακτήσουμε τις παραμέτρους ενός κατασκευαστή χρησιμοποιώντας ταίριασμα προτύπων
- Κατά συνέπεια, ο κατασκευαστής value δεν είναι συνάρτηση: οι κανονικές συναρτήσεις δε μπορούν να χρησιμοποιηθούν με αυτόν τον τρόπο ως πρότυπα

Η γλώσσα ML σε βάθος

31

Κατασκευαστές και ταίριασμα προτύπων

```
- fun square PlusInf = PlusInf
= | square MinusInf = PlusInf
= | square (Value x) = Value (x*x);
val square = fn : exint -> exint
- square MinusInf;
val it = PlusInf : exint
- square (Value 3);
val it = Value 9 : exint
```

- Διαχειριζόμαστε νέους τύπους δεδομένων με συναρτήσεις σαν την παραπάνω που ορίζονται μέσω ταίριασματος προτύπων
- Επειδή ένας exint είναι είτε PlusInf, ή MinusInf, ή Value, η παραπάνω συνάρτηση είναι εξαντλητική ως προς το ταίριασμα προτύπων

Η γλώσσα ML σε βάθος

32

Χειρισμός εξαιρέσεων στην ML

- Μέσω ταίριασματος προτύπων μπορούμε επίσης να χειριστούμε εξαιρέσεις

```
- fun square PlusInf = PlusInf
= | square MinusInf = PlusInf
= | square (Value x) = Value (x*x)
= | handle Overflow => PlusInf;
val square = fn : exint -> exint
- square (Value 10000);
val it = Value 100000000 : exint
- square (Value 100000);
val it = PlusInf : exint
```

- Θα δούμε περισσότερα για τις εξαιρέσεις στη Java

Η γλώσσα ML σε βάθος

33

Ένα ακόμα παράδειγμα: bunch

```
datatype 'x bunch =
  One of 'x |
  Group of 'x list;
```

- Ένα 'x bunch είναι είτε ένα πράγμα τύπου 'x, είτε μια λίστα από πράγματα τύπου 'x
- Όπως συνήθως, η ML συμπεραίνει τύπους αυτόματα:

```
- One 1.0;
val it = One 1.0 : real bunch
- Group [true,false];
val it = Group [true,false] : bool bunch
```

Η γλώσσα ML σε βάθος

34

Παράδειγμα: Πολυμορφικός Συμπερασμός

- Η ML μπορεί να συμπεράνει πολυμορφικούς bunch τύπους, αλλά δεν χρειάζεται πάντα να τους επιλύσει πλήρως, όπως για παράδειγμα συμβαίνει όταν σε αυτούς περιλαμβάνονται λίστες

```
- fun size (One _) = 1
= | size (Group x) = length x;
val size = fn : 'a bunch -> int
- size (One 1.0);
val it = 1 : int
- size (Group [true,false]);
val it = 2 : int
```

Η γλώσσα ML σε βάθος

35

Παράδειγμα: Μη Πολυμορφικός Συμπερασμός

```
- fun sum (One x) = x
= | sum (Group xlist) = foldr op + 0 xlist;
val sum = fn : int bunch -> int
- sum (One 5);
val it = 5 : int
- sum (Group [1,2,3]);
val it = 6 : int
```

- Χρησιμοποιήσαμε τον τελεστή + (ως όρισμα της foldr) στα στοιχεία της λίστας
- Κατά συνέπεια, η ML μπορεί να συμπεράνει ότι ο τύπος της παραμέτρου της συνάρτησης sum είναι int bunch

Η γλώσσα ML σε βάθος

36

Αυτή ήταν η ML

- ... ή τουλάχιστον, όλη η ML που θα δούμε στο μάθημα
- Φυσικά, υπάρχουν κάποια μέρη ακόμα:
 - Εγγραφές (records) που είναι σαν τις ηλειαδές αλλά έχουν πεδία με ονόματα
 - π.χ. {name="Arnold", age=42} : {name : string, age : int}
 - Πίνακες (arrays) με στοιχεία που μπορούν να τροποποιηθούν
 - Αναφορές (references) για τιμές που μπορούν να τροποποιηθούν
 - Χειρισμός εξαιρέσεων (exception handling)
 - Υποστήριξη encapsulation και απόκρυψης δεδομένων:
 - structures: συλλογές από τύπους δεδομένων + συναρτήσεις
 - signatures: interfaces για τα structures
 - functors: κάτι σα συναρτήσεις για structures, που όμως επιτρέπουν μεταβλητές τύπων και την ανάθεση τιμών (instantiation) στις παραμέτρους των structures

Η γλώσσα ML σε βάθος

37

Κάποια άλλα μέρη της ML

- API: the standard basis
 - Προκαθορισμένες συναρτήσεις, τύποι, κ.λπ.
 - Κάποιες από αυτές είναι σε structures: `Int.maxInt`, `Real.Math.sqrt`, `List.nth`, κ.λπ.
- eXene: μια βιβλιοθήκη της ML για εφαρμογές σε γραφικό περιβάλλον X windows
- O Compilation Manager για διαχείριση μεγαλύτερων projects
- Άλλες διάλεκτοι της ML
 - O'Cam1
 - Η επέκταση της ML για ταυτοχρονισμό (Concurrent ML - CML)

Η γλώσσα ML σε βάθος

38

Συμπερασματικά για τις συναρτησιακές γλώσσες

- Η ML είναι η μόνη γλώσσα που θα εξετάσουμε από τις συναρτησιακές γλώσσες προγραμματισμού
- Σε αυτό το είδος προγραμματισμού, η εκτέλεση γίνεται μέσω αποτίμησης εκφράσεων και ταιριάσματος προτύπων
- Εάν σας αρέσει αυτό το συλ προγραμματισμού, υπάρχουν και άλλες γλώσσες για εξερεύνηση, όπως η Lisp, η Scheme, η Haskell, η Clean και η Erlang

Η γλώσσα ML σε βάθος

39