

Εισαγωγή στη Γλώσσα ML



Juan Miró

Κωστής Σαγώνας <kostis@cs.ntua.gr>
Νίκος Παπασπύρου <nickie@softlab.ntua.gr>

Συναρτησιακός και Προστακτικός Προγραμματισμός

- Ένας τρόπος διαχωρισμού
 - Ο προστακτικός προγραμματισμός επικεντρώνει στο πώς θα υλοποιήσουμε τα συστατικά του προγράμματός μας
 - Ο συναρτησιακός προγραμματισμός επικεντρώνει στο τι συστατικά θα πρέπει να έχει το πρόγραμμά μας
- Συναρτησιακός προγραμματισμός
 - Βασίζεται στο μαθηματικό μοντέλο του λ-λογισμού (Church)
 - “Προγραμματισμός χωρίς μεταβλητές”
 - Είναι από τη φύση του κομψός, σύντομος και σαφής τρόπος προγραμματισμού, στον οποίο αποφεύγονται τελείως κάποιου είδους προγραμματιστικά σφάλματα
 - Θεωρείται από πολλούς ως ανώτερος τρόπος προγραμματισμού

Διαφάνεια αναφοράς (referential transparency)

- Σε μία γλώσσα συναρτησιακού προγραμματισμού, **η αποτίμηση μιας συνάρτησης δίνει πάντα το ίδιο αποτέλεσμα για τις ίδιες τιμές των παραμέτρων της**
- Η σημαντική αυτή ιδιότητα δεν ισχύει κατ' ανάγκη στις γλώσσες προστακτικού προγραμματισμού
- Στον προστακτικό προγραμματισμό αυτό συμβαίνει λόγω:
 - Μεταβλητών που ορίζονται και αλλάζουν τιμές εκτός του σώματος της συνάρτησης (global variables)
 - Εξάρτησης από την κατάσταση (state) του υπολογισμού
 - Άλλων παρενεργειών (side-effects) που μπορεί να υπάρχουν στο πρόγραμμα

Παράδειγμα σε Pascal



```
program example(output)
var flag: boolean;

function f(n: int): int
begin
    if flag then f := n
                else f := 2*n;
    flag := not flag
end

begin
    flag := true;
    writeln(f(1));
    writeln(f(1))
end.
```

Τι τυπώνει το πρόγραμμα;

1 και μετά 2

- Περίεργο διότι η f είναι συνάρτηση!
- Στα μαθηματικά οι συναρτήσεις εξαρτώνται μόνο από τα ορίσματά τους

Μεταβλητές και “μεταβλητές”

- Στην καρδιά του προβλήματος είναι το γεγονός ότι η μεταβλητή `flag` επηρεάζει την τιμή της `f`
- Ειδικότερα, η συμπεριφορά οφείλεται στην ανάθεση

`flag := not flag`

- Σε μια γλώσσα χωρίς πολλαπλές αναθέσεις μεταβλητών δεν υπάρχουν τέτοια προβλήματα!
- Στις συναρτησιακές γλώσσες, οι μεταβλητές είναι ονόματα για συγκεκριμένες τιμές, δεν είναι ονόματα για συγκεκριμένες θέσεις μνήμης
- Μπορούμε να τις θεωρήσουμε «όχι πολύ μεταβλητές»

Η γλώσσα ML (Meta Language)

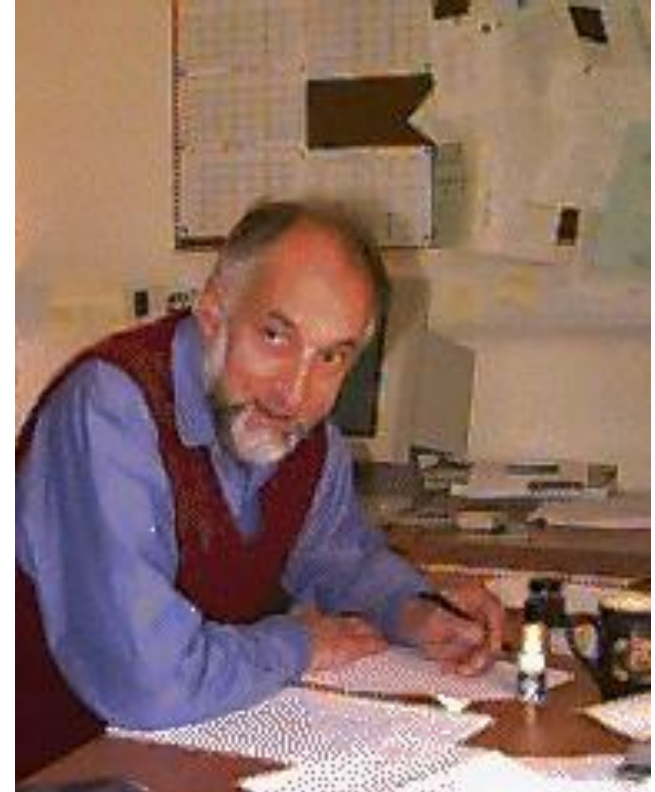
- Γλώσσα συναρτησιακού προγραμματισμού με τύπους
- Σχεδιασμένη για αλληλεπιδραστική χρήση (interactive use)
- Συνδυάζει τα παρακάτω στοιχεία:
 - Βασισμένη στο λ-λογισμό και στην αποτίμηση εκφράσεων
 - Συναρτήσεις υψηλής τάξης (higher-order functions)
 - Αυτόματη διαχείριση μνήμης (με χρήση συλλογής σκουπιδιών)
 - Αφηρημένους τύπους δεδομένων (abstract data types)
 - Σύστημα αρθρωμάτων (module system)
 - Εξαιρέσεις (exceptions)
- Γενικής χρήσης μη προστακτική, μη αντικειμενοστρεφής γλώσσα
 - Σχετικές γλώσσες: OCaml, Haskell, ...

Γιατί εξετάζουμε την ML;

- Τύποι και αυστηρό σύστημα τύπων
 - Γενικά θέματα για στατικό έναντι δυναμικού ελέγχου των τύπων
 - Συμπερασμός τύπων (type inference)
 - Πολυμορφισμός και γενικός προγραμματισμός (generic programming)
- Διαχείριση μνήμης
 - Στατική εμβέλεια και δομή κατά μπλοκ
 - Εγγραφές ενεργοποίησης συναρτήσεων (function activation records) και υλοποίηση συναρτήσεων υψηλής τάξης
- Έλεγχος και δομές ροής
 - Εξαιρέσεις
 - Αναδρομή “ουράς” (tail recursion) και συνέχειες (continuations)

Σύντομη ιστορία της γλώσσας ML

- Robin Milner (ACM Turing Award)
- Logic for Computable Functions
 - Stanford 1970-1971
 - Edinburgh 1972-1995
 - Cambridge 1996-2010
- Μεταγλώσσα του συστήματος LCF
 - Απόδειξη θεωρημάτων (theorem proving)
 - Σύστημα τύπων (type system)
 - Συναρτήσεις υψηλής τάξης (higher-order functions)
- Θα χρησιμοποιήσουμε την υλοποίηση SML/NJ (Standard ML of New Jersey)



Η γλώσσα ML μέσα από παραδείγματα

```
% sml

Standard ML of New Jersey, v110.XX
- 42;
val it = 42 : int
- 2 + 3;
val it = 5 : int
- fun square x = x * x;
val square = fn : int -> int
- square 5;
val it = 25 : int
- square;
val it = fn : int -> int
```

Βασικοί τύποι της ML

- Booleans
 - `true, false : bool`
- Ακέραιοι και τελεστές τους
 - `0, 1, 2, ... : int`
 - `+, -, *, mod, div, ~` (μοναδιαίο μείον)
- Συμβολοσειρές και τελεστές τους
 - `"Robin Milner" : string`
 - `^` (συνένωση συμβολοσειρών)
- Αριθμοί κινητής υποδιαστολής και τελεστές τους
 - `1.0, 2.56, 3.14159, ...`
 - `+, -, *, /, ~`

Οι τελεστές είναι αριστερά προσηταιριστικοί, με προτεραιότητες $\{+, -\} < \{*, /, \text{div}, \text{mod}\} < \{\sim\}$.

Η γλώσσα ML μέσα από παραδείγματα

```
- 1 = 2;  
val it = false : bool  
- 1 <> 2 andalso true <> false;  
val it = true : bool  
- true = false orelse 1 <= 2;  
val it = true : bool  
- "Robin" > "Milner";  
val it = true : bool  
- 2.56 < 3.14;  
val it = true : bool  
- 2.56 = 3.14;  
stdIn: Error: operator and operand don't agree  
operator domain: 'Z * 'Z  
operand:      real * real
```

Υπερφόρτωση τελεστών (operator overloading)

```
- 6 * 7
val it = 42 : int
- 6.0 * 7.0;
val it = 42.0 : real
- 2.0 * 21;
stdIn: Error: operator and operand don't agree
  operator domain: real * real
  operand:          real * int
in expression:     2.0 * 21
```

- Ο τελεστής * (και άλλοι όπως ο +) είναι **υπερφορτωμένοι**
- Έχουν διαφορετική ερμηνεία σε ζεύγη ακεραίων και διαφορετική σε ζεύγη αριθμών κινητής υποδιαστολής
- Η ML δεν κάνει αυτόματη μετατροπή από ακεραίους σε πραγματικούς αριθμούς (όπως π.χ. κάνει η C)

Η γλώσσα ML μέσα από παραδείγματα

```
- fun max a b =  
=   if a > b then a else b;  
val max = fn : int -> int -> int  
- max 17 5;  
val it = 17 : int  
- max 10 42;  
val it = 42 : int
```

- Προσέξτε τον περίεργο τύπο
 $\text{int} \rightarrow \text{int} \rightarrow \text{int}$
- Λέει ότι η `max` είναι μια συνάρτηση που παίρνει έναν ακέραιο και επιστρέφει μια συνάρτηση που παίρνει έναν ακέραιο και επιστρέφει έναν ακέραιο

Currying

- Οι συναρτήσεις είναι αντικείμενα πρώτης τάξης τα οποία μπορούμε να τα διαχειριστούμε όπως όλα τα άλλα αντικείμενα (π.χ. τους ακραίους)



Haskell B. Curry

```
- fun max a b = if a > b then a else b;  
val max = fn : int -> int -> int  
- val max_five = max 5;  
val max_five = fn : int -> int  
- max_five 42;  
val it = 42 : int  
- max_five 3;  
val it = 5 : int
```

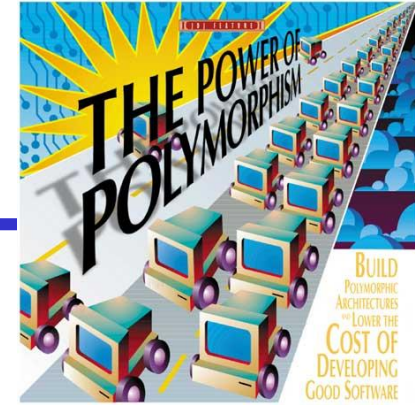


Currying vs. Tuples

- Αν θέλουμε, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πλειάδες (tuples) ως ορίσματα ή αποτελέσματα συναρτήσεων

```
- fun max (a,b) = if a > b then a else b;  
val max = fn : int * int -> int  
- max (17,42);  
val it = 42 : int  
- fun reverse (x,y) = (y,x);  
val reverse = fn : 'a * 'b -> 'b * 'a  
- reverse (17,42);  
val it = (42,17) : int * int  
- max (reverse (17,42));  
val it = 42 : int
```

Πολυμορφισμός



- Η συνάρτηση `reverse` έχει έναν ενδιαφέροντα **τύπο**

```
- fun reverse (x,y) = (y,x) ;  
val reverse = fn : 'a * 'b -> 'b * 'a
```

- Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να αντιστρέψουμε μια δυάδα όπου το πρώτο στοιχείο της είναι οποιουδήποτε τύπου και το δεύτερο στοιχείο επίσης είναι

```
- reverse (42,3.14) ;  
val it = (3.14,42) : real * int  
- reverse ("foo", (1,2)) ;  
val it = ((1,2), "foo") : (int * int) * string
```


Αναδρομή

- Επειδή δεν υπάρχουν μεταβλητές με την παραδοσιακή έννοια, τα προγράμματα χρησιμοποιούν **αναδρομή** για να εκφράσουν επανάληψη

```
- fun sum n =  
=   if n = 0 then 0 else sum (n-1) + n;  
val sum = fn : int -> int  
- sum 2;  
val it = 3 : int  
- sum 3;  
val it = 6 : int  
- sum 4;  
val it = 10 : int
```

Αναδρομή

- Επειδή δεν υπάρχουν μεταβλητές με την παραδοσιακή έννοια, τα προγράμματα χρησιμοποιούν **αναδρομή** για να εκφράσουν επανάληψη

```
- fun sum n =  
=   if n = 0 then 0 else sum (n-1) + n;  
val sum = fn : int -> int  
- sum 2;  
val it = 3 : int  
- sum 3;  
val it = 6 : int  
- sum 4;  
val it = 10 : int
```

Αναδρομή

Επειδή δεν υπάρχουν μεταβλητές με την παραδοσιακή έννοια, τα προγράμματα χρησιμοποιούν **αναδρομή** για να εκφράσουν επανάληψη

```
- fun sum n =  
=   if n = 0 then 0 else sum (n-1) + n;  
val sum = fn : int -> int  
- sum 2;  
val it = 3 : int  
- sum 3;  
val it = 6 : int  
- sum 4;  
val it = 10 : int
```

Εισαγωγή στη γλώσσα ML

11

Τελεστής ύψωσης σε δύναμη

- Μπορούμε επίσης να ορίσουμε νέους αριθμητικούς τελεστές ως συναρτήσεις

```
- fun x ^ y =  
=   if y = 0 then 1  
=   else x * (x ^ (y-1));  
val ^ = fn : int * int -> int  
- 2 ^ 2;  
val it = 4 : int  
- 2 ^ 3;  
val it = 8 : int  
- 2 ^ 4;  
val it = 16 : int
```



Επαναχρησιμοποίηση αποτελεσμάτων

- Αν δεν έχουμε μεταβλητές, είμαστε αναγκασμένοι να επαναλάβουμε εκφράσεις (και υπολογισμούς)

```
fun f x =  
  g(square(max(x,4))) +  
  (if x < 1 then 1  
   else g(square(max(x,4))))
```

- Μια μέθοδος για να γράψουμε πιο εύκολα την παραπάνω συνάρτηση είναι με χρήση μιας βοηθητικής συνάρτησης

```
fun f1(a,b) = b + (if a < 1 then 1 else b)  
fun f x = f1(x, g(square(max(x,4))))
```

Η έκφραση let

- Ένας πιο εύκολος τρόπος είναι ο ορισμός ενός τοπικού ονόματος για την επαναχρησιμοποιούμενη έκφραση

```
fun f x =  
  let  
    val gg = g(square(max(x,4)))  
  in  
    gg + (if x < 1 then 1 else gg)  
  end
```

Η έκφραση let δεν είναι ανάθεση

```
- let
=   val a = 2
=   in
=     (let
=       val a = a + 2
=       in
=         a
=       end,
=       a)
= end;
val it = (4,2) : int * int
```

Σύνθετοι τύποι δεδομένων στην ML

- Προγράμματα που επεξεργάζονται μόνο βαθμωτά δεδομένα (scalars - χωρίς δομή) δεν είναι πολύ χρήσιμα
- Οι συναρτησιακές γλώσσες προγραμματισμού είναι ό,τι πρέπει για την επεξεργασία σύνθετων τύπων δεδομένων
- Έχουμε ήδη δει **πλειάδες**, που είναι σύνθετοι τύποι δεδομένων για την αναπαράσταση ενός ορισμένου αριθμού αντικειμένων (πιθανώς διαφορετικών τύπων)
- Η ML έχει επίσης **λίστες**, που είναι σειρές οποιουδήποτε αριθμού αντικειμένων του ίδιου όμως τύπου

Λίστες

- Οι πλειάδες περικλείονται από παρενθέσεις, οι λίστες από αγκύλες

```
- (1,2);  
val it = (1,2) : int * int  
- [1,2];  
val it = [1,2] : int list
```

- Ο τελεστής @ συνενώνει δύο λίστες

```
- [1,2] @ [3,4];  
val it = [1,2,3,4] : int list
```

Cons

- Μπορούμε να προσθέσουμε στοιχεία στην αρχή μιας λίστας με τον τελεστή `::` (προφέρεται `cons`)

```
- 1 :: 2 :: 3 :: [];  
val it = [1,2,3] : int list  
- 0 :: it;  
val it = [0,1,2,3] : int list
```

- Η συνένωση δύο λιστών δεν είναι το ίδιο με τη χρήση `::`

```
- [1,2] :: [3,4];  
stdIn: Error: operator and operand don't agree  
operator domain: int list * int list list  
operand:          int list * int list  
in expression:  
  (1 :: 2 :: nil) :: 3 :: 4 :: nil
```


Άλλες συναρτήσεις για λίστες

```
- null [];  
val it = true : bool  
- null [1,2];  
val it = false : bool  
- val l = [1,2,3,4];  
val l = [1,2,3,4] : int list  
- hd l;  
val it = 1 : int  
- tl l;  
val it = [2,3,4] : int list  
- length l;  
val it = 4 : int  
- nil;  
val it = [] : 'a list
```

Ορισμός συναρτήσεων για λίστες

```
- fun addto (l,v) =  
=   if null l then nil  
=   else hd l + v :: addto (tl l,v);  
val addto = fn : int list * int -> int list  
-  
-  
- addto ([1,2,3],2);  
val it = [3,4,5] : int list  
- addto ([1,2,3],~2);  
val it = [~1,0,1] : int list
```

Ορισμός συναρτήσεων για λίστες

```
- fun map (f, l) =  
=   if null l then nil  
=   else f (hd l) :: map (f, tl l);  
val map = fn : ('a -> 'b) * 'a list -> 'b list  
-  
-  
- fun add2 x = x + 2;  
val add2 = fn : int -> int  
- map (add2, [10,11,12]);  
val it = [12,13,14] : int list
```

Ανώνυμες συναρτήσεις (λ-εκφράσεις)

```
- map (fn x => x + 2, [10,11,12]);  
val it = [12,13,14] : int list
```

- Το πρώτο στοιχείο στο όρισμα της παραπάνω συνάρτησης λέγεται **λάμβδα έκφραση**: είναι συνάρτηση χωρίς όνομα
- Ο τελεστής `fn` είναι ισοδύναμος με μία λάμβδα έκφραση

```
- val add2 = fn x => x + 2;  
val add2 = fn : int -> int  
- add2 10;  
val it = 12 : int
```



Αναδρομικές λάμδα εκφράσεις

- Πώς καλούμε αναδρομικά κάτι το οποίο δεν έχει όνομα;
- Του δίνουμε ένα!

```
- let
=   val rec f =
=     fn x => if null x then nil
=           else (hd x + 3) :: f (tl x)
= in
=   f
= end
= [1,2,3,4];
val it = [4,5,6,7] : int list
```

Ταίριασμα προτύπων (pattern matching)

- Στα μαθηματικά, οι συναρτήσεις πολλές φορές ορίζονται με διαφορετικές εκφράσεις βάσει κάποιων συνθηκών


$$f(x) = \begin{cases} x & \text{εάν } x \geq 0 \\ -x & \text{εάν } x < 0 \end{cases}$$

- Οι συναρτήσεις της ML δε διαφέρουν και επιτρέπουν τον ορισμό κατά περιπτώσεις και την αποφυγή της χρήσης `if`

```
fun map (f, []) = []  
  | map (f, l) = f (hd l) :: map (f, tl l)
```

- Όμως, ο ορισμός ανά περιπτώσεις είναι ευαίσθητος ως προς τη σειρά εμφάνισης των συναρτησιακών προτάσεων

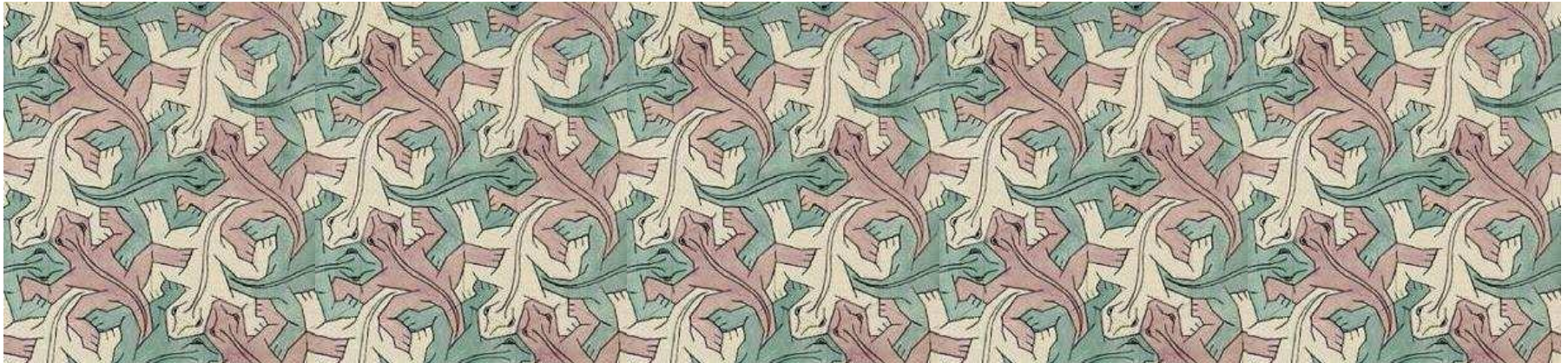
```
fun map (f, l) = f (hd l) :: map (f, tl l)  
  | map (f, []) = []
```



Καλύτερος ορισμός μέσω ταιριάσματος προτύπων

- Το πρότυπο `_` ταιριάζει με όλα τα αντικείμενα
- Το πρότυπο `h :: t` ταιριάζει με μια λίστα και δένει
 - τη μεταβλητή `h` με την κεφαλή της λίστας και
 - τη μεταβλητή `t` με την ουρά της λίστας

```
fun map (_, []) = []  
  | map (f, h::t) = f h :: map (f, t)
```



Χρήση σταθερών ως πρότυπα

```
- fun is_zero 0 = "yes";  
stdIn: Warning: match nonexhaustive  
      0 => ...  
val is_zero = fn : int -> string  
- is_zero 0;  
val it = "yes" : string
```

- Κάθε σταθερά ενός τύπου που υποστηρίζει ισότητα μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως πρότυπο
- Αλλά δεν μπορούμε να γράψουμε

```
fun is_zero 0.0 = "yes";
```


Μη εξαντλητικό ταίριασμα προτύπων

- Στο προηγούμενο παράδειγμα, ο τύπος της `is_zero` ήταν `int -> string`, αλλά ταυτόχρονα υπήρξε η προειδοποίηση “**Warning: match nonexhaustive**”
- Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση ορίστηκε με πρότυπα που δεν εξάντλησαν το πεδίο ορισμού της συνάρτησης
- Κατά συνέπεια, είναι δυνατό να υπάρχουν προβλήματα χρόνου εκτέλεσης, όπως:

```
- is_zero 42;  
uncaught exception Match: [nonexhaustive  
                             match failure]  
raised at ...
```

Κανόνες ταιριάσματος προτύπων στην ML

- Το πρότυπο `_` ταιριάζει με οτιδήποτε
- Μια μεταβλητή είναι ένα πρότυπο που ταιριάζει με οποιαδήποτε τιμή και δένει τη μεταβλητή με την τιμή
- Μια σταθερά (ενός τύπου ισότητας) είναι ένα πρότυπο που ταιριάζει μόνο με τη συγκεκριμένη σταθερά
- Μια πλειάδα $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \dots, \mathbf{z})$ είναι ένα πρότυπο που ταιριάζει με κάθε πλειάδα του ίδιου μεγέθους, της οποίας τα περιεχόμενα ταιριάζουν με τη σειρά τους με τα $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \dots, \mathbf{z}$
- Μια λίστα $[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \dots, \mathbf{z}]$ είναι ένα πρότυπο που ταιριάζει με κάθε λίστα του ίδιου μήκους, της οποίας τα στοιχεία ταιριάζουν με τη σειρά τους με τα $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \dots, \mathbf{z}$
- Ένα `cons h :: t` είναι ένα πρότυπο που ταιριάζει με κάθε μη κενή λίστα, της οποίας η κεφαλή ταιριάζει με το `h` και η ουρά με το `t`

Παράδειγμα χρήσης ταιριάσματος προτύπων

- Παραγοντικό με χρήση `if-then-else`

```
fun fact n =  
  if n = 0 then 1 else n * fact (n-1)
```

- Παραγοντικό με χρήση ταιριάσματος προτύπων

```
fun fact 0 = 1  
  | fact n = n * fact (n-1)
```

- Παρατηρήστε ότι υπάρχει επικάλυψη στα πρότυπα
- Η εκτέλεση δοκιμάζει πρότυπα με τη σειρά που αυτά εμφανίζονται (από πάνω προς τα κάτω)

Άλλα παραδείγματα

- Η παρακάτω δομή είναι πολύ συνηθισμένη σε αναδρομικές συναρτήσεις που επεξεργάζονται λίστες: μία περίπτωση για την κενή λίστα (`nil`) και (τουλάχιστον) μία περίπτωση για όταν η λίστα δεν είναι κενή (`h :: t`).
- Άθροισμα όλων των στοιχείων μιας λίστας

```
fun sum nil = 0
    | sum (h::t) = h + sum t
```

- Αριθμός των στοιχείων μιας λίστας με κάποια ιδιότητα

```
fun ctrue nil = 0
    | ctrue (true::t) = 1 + ctrue t
    | ctrue (false::t) = ctrue t
```

Ένας περιορισμός: γραμμικά πρότυπα

- Δεν επιτρέπεται η χρήση της ίδιας μεταβλητής περισσότερες από μία φορές στο ίδιο πρότυπο
- Για παράδειγμα, το παρακάτω δεν επιτρέπεται:

```
fun f (a, a) = ... for pairs of equal elements  
  | f (a, b) = ... for pairs of unequal elements
```

- Αντί αυτού πρέπει να χρησιμοποιηθεί το παρακάτω:

```
fun f (a, b) =  
  if a = b then ... for pairs of equal elements  
  else ... for pairs of unequal elements
```

Συνδυασμός προτύπων και `let`

```
fun halve nil = (nil, nil)
  | halve [a] = ([a], nil)
  | halve (a::b::cs) =
    let
      val (x, y) = halve cs
    in
      (a::x, b::y)
    end
```

- Με τη χρήση προτύπων στους ορισμούς ενός `let`, μπορούμε να “αποσυνθέσουμε” εύκολα ένα αποτέλεσμα
- Η παραπάνω συνάρτηση παίρνει ως όρισμα μια λίστα και επιστρέφει ένα ζεύγος από λίστες, η κάθε μία από τις οποίες έχει τα μισά στοιχεία της αρχικής λίστας

Χρήση της συνάρτησης `halve`

```
- fun halve nil = (nil, nil)
=   | halve [a] = ([a], nil)
=   | halve (a::b::cs) =
=       let
=           val (x, y) = halve cs
=       in
=           (a::x, b::y)
=       end;
val halve = fn : 'a list -> 'a list * 'a list
- halve [1];
val it = ([1],[]) : int list * int list
- halve [1,2];
val it = ([1],[2]) : int list * int list
- halve [1,2,3,4,5,6];
val it = ([1,3,5],[2,4,6]) : int list * int list
```

Ένα μεγαλύτερο παράδειγμα: Merge Sort

- Η συνάρτηση `halve` διανέμει τα στοιχεία μιας λίστας σε δύο περίπου ίσα κομμάτια
- Είναι το πρώτο βήμα για ταξινόμηση συγχώνευσης
- Η συνάρτηση `merge` συγχωνεύει δύο ταξινομημένες λίστες

```
- fun merge (nil, ys) = ys
=   | merge (xs, nil) = xs
=   | merge (x::xs, y::ys) =
=       if x < y then x :: merge (xs, y::ys)
=       else y :: merge (x::xs, ys);
val merge = fn : int list * int list -> int list
- merge ([2],[1,3]);
val it = [1,2,3] : int list
- merge ([1,3,4,7,8],[2,3,5,6,10]);
val it = [1,2,3,3,4,5,6,7,8,10] : int list
```


Η συνάρτηση Merge Sort

```
fun mergeSort nil = nil
  | mergeSort [a] = [a]
  | mergeSort theList =
    let
      val (x, y) = halve theList
    in
      merge (mergeSort x, mergeSort y)
    end
```

Ο τύπος της παραπάνω συνάρτησης είναι

```
int list -> int list
```

λόγω του τύπου της συνάρτησης `merge`

Παράδειγμα χρήσης της Merge Sort

```
- fun mergeSort nil = nil
=   | mergeSort [a] = [a]
=   | mergeSort theList =
=     let
=       val (x, y) = halve theList
=     in
=       merge (mergeSort x, mergeSort y)
=     end;
val mergeSort = fn : int list -> int list
- mergeSort [4,3,2,1];
val it = [1,2,3,4] : int list
- mergeSort [4,2,3,1,5,3,6];
val it = [1,2,3,3,4,5,6] : int list
```

Φωλιασμένοι ορισμοί συναρτήσεων

- Μπορούμε να ορίσουμε τοπικές συναρτήσεις, ακριβώς όπως ορίζουμε τοπικές μεταβλητές, με χρήση `let`
- Συνήθως αυτό γίνεται για βοηθητικές συναρτήσεις που δε θεωρούνται χρήσιμες από μόνες τους
- Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να κρύψουμε τις συναρτήσεις `halve` και `merge` από το υπόλοιπο πρόγραμμα
- Αυτό έχει και το πλεονέκτημα ότι οι εσωτερικές συναρτήσεις μπορούν να αναφέρονται σε μεταβλητές των εξωτερικών συναρτήσεων

```

(* Sort a list of integers. *)
fun mergeSort nil = nil
  | mergeSort [e] = [e]
  | mergeSort theList =
    let
      (* From the given list make a pair of lists
       * (x,y), where half the elements of the
       * original are in x and half are in y. *)
      fun halve nil = (nil, nil)
        | halve [a] = ([a], nil)
        | halve (a::b::cs) =
          let
            val (x, y) = halve cs
          in
            (a::x, b::y)
          end

      (* Merge two sorted lists of integers into
       * a single sorted list. *)
      fun merge (nil, ys) = ys
        | merge (xs, nil) = xs
        | merge (x::xs, y::ys) =
          if x < y then x :: merge(xs, y::ys)
          else y :: merge(x::xs, ys)

      val (x, y) = halve theList
    in
      merge (mergeSort x, mergeSort y)
    end

```

Ανακεφαλαίωση της γλώσσας ML

- Βασικοί τύποι της ML: `int`, `real`, `bool`, `char`, `string`
- Τελεστές: `~`, `+`, `-`, `*`, `div`, `mod`, `/`, `^`, `::`, `@`, `<`, `>`, `<=`, `>=`, `=`, `<>`, `not`, `andalso`, `orelse`
- Επιλογή μεταξύ δύο: `if ... then ... else`
- Ορισμός συναρτήσεων: `fun`, `fn =>` και τιμών: `val`, `let`
- Κατασκευή (και αποσύνθεση) πλειάδων: `(x, y, ..., z)`
- Κατασκευή λιστών: `[x, y, ..., z]`, `::`, `@`
- Κατασκευαστές τύπων: `*`, `list`, και `->`
- Ταίριασμα προτύπων
- Φωλιασμένες συναρτήσεις