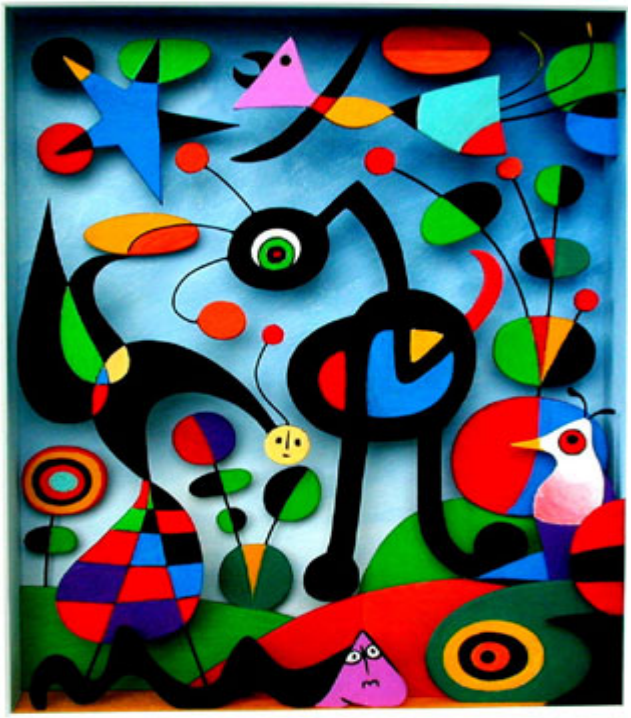
Εισαγωγή στη Γλώσσα ML



Juan Miró

Κωστής Σαγώνας <kostis@cs.ntua.gr>

Συναρτησιακός και Προστακτικός Προγραμματισμός

- Ένας τρόπος διαχωρισμού
  - Ο προστακτικός προγραμματισμός επικεντρώνει στο **πώς** θα υλοποιήσουμε τα συστατικά του προγράμματός μας
  - Ο συναρτησιακός προγραμματισμός επικεντρώνει στο **τι** συστατικά θα πρέπει να έχει το πρόγραμμά μας

- Συναρτησιακός προγραμματισμός
  - Βασίζεται στο μαθηματικό μοντέλο του λ-λογισμού (Church)
  - “Προγραμματισμός χωρίς μεταβλητές”
  - Είναι από τη φύση του κομψός, σύντομος και σαφής τρόπος προγραμματισμού, στον οποίο αποφεύγονται τελείως κάποιου είδους προγραμματιστικά σφάλματα
  - Θεωρείται από πολλούς ως ανώτερος τρόπος προγραμματισμού

Διαφάνεια αναφοράς (referential transparency)

- Σε μία γλώσσα συναρτησιακού προγραμματισμού, **η αποτίμηση μιας συνάρτησης δίνει πάντα το ίδιο αποτέλεσμα για τις ίδιες τιμές των παραμέτρων της**
- Η σημαντική αυτή ιδιότητα δεν ισχύει κατ' ανάγκη στις γλώσσες προστακτικού προγραμματισμού
- Στον προστακτικό προγραμματισμό αυτό συμβαίνει λόγω:
  - Μεταβλητών που ορίζονται και αλλάζουν τιμές εκτός του σώματος της συνάρτησης (global variables)
  - Εξάρτησης από την κατάσταση (state) του υπολογισμού
  - Άλλων παρενεργειών (side-effects) που μπορεί να υπάρχουν στο πρόγραμμα

Παράδειγμα σε Pascal

```
program example(output)
var flag: boolean;

function f(n: int): int
begin
  if flag then f := n
          else f := 2*n;
  flag := not flag
end

begin
  flag := true;
  writeln(f(1)+f(2));
  writeln(f(2)+f(1));
end
```

Τι τυπώνει το πρόγραμμα;

5 και μετά 4

- Περίεργο διότι περιμένουμε ότι

  f(1)+ f(2) = f(2)+ f(1)

- Στα μαθηματικά οι συναρτήσεις εξαρτώνται μόνο από τα ορίσματά τους

Μεταβλητές και “μεταβλητές”

- Στην καρδιά του προβλήματος είναι το γεγονός ότι η μεταβλητή **`flag`** επηρεάζει την τιμή της **`f`**
- Ειδικότερα, η συμπεριφορά οφείλεται στην ανάθεση

```
flag := not flag
```

- Σε μια γλώσσα χωρίς πολλαπλές αναθέσεις μεταβλητών δεν υπάρχουν τέτοια προβλήματα!
- Στις συναρτησιακές γλώσσες, **οι μεταβλητές είναι ονόματα για συγκεκριμένες τιμές, δεν είναι ονόματα για συγκεκριμένες θέσεις μνήμης**
- Μπορούμε να τις θεωρήσουμε «όχι πολύ μεταβλητές»

Η γλώσσα ML (Meta Language)

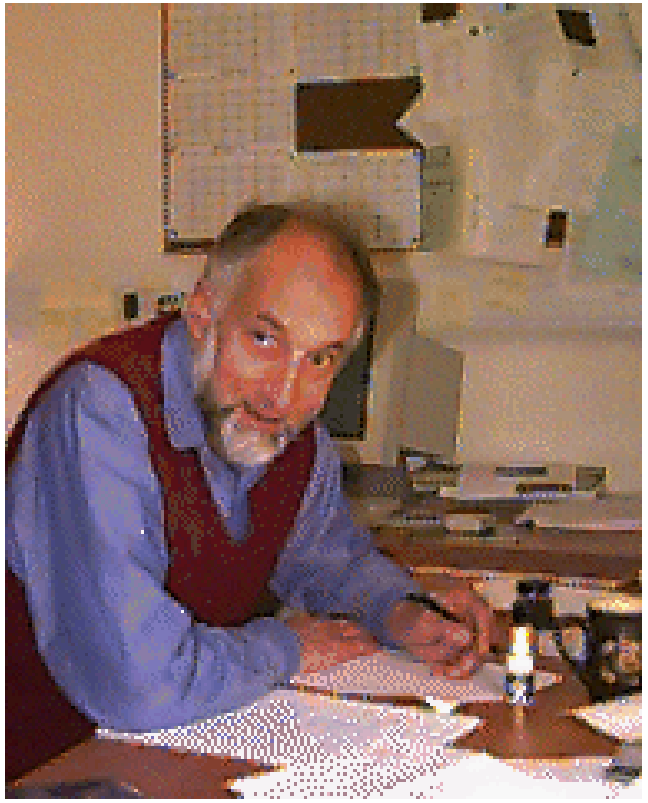
- Γλώσσα συναρτησιακού προγραμματισμού με τύπους
- Σχεδιασμένη για αλληλεπιδραστική χρήση (interactive use)
- Συνδυάζει τα παρακάτω στοιχεία:
  - Βασισμένη στο λ-λογισμό και στην αποτίμηση εκφράσεων
  - Συναρτήσεις υψηλής τάξης (higher-order functions)
  - Αυτόματη διαχείριση μνήμης (με χρήση συλλογής σκουπιδιών)
  - Αφηρημένους τύπους δεδομένων (abstract data types)
  - Σύστημα αρθρωμάτων (module system)
  - Εξαιρέσεις (exceptions)
- Γενικής χρήσης μη προστακτική, μη αντικειμενοστρεφής γλώσσα
  - Σχετικές γλώσσες: OCaml, Haskell, …

Γιατί εξετάζουμε την ML;

- Τύποι και αυστηρό σύστημα τύπων
  - Γενικά θέματα για στατικό έναντι δυναμικού ελέγχου των τύπων
  - Συμπερασμός τύπων (type inference)
  - Πολυμορφισμός και γενικός προγραμματισμός (generic programming)
- Διαχείριση μνήμης
  - Στατική εμβέλεια και δομή κατά μπλοκ
  - Εγγραφές ενεργοποίησης συναρτήσεων (function activation records) και υλοποίηση συναρτήσεων υψηλής τάξης
- Έλεγχος και δομές ροής
  - Εξαιρέσεις
  - Αναδρομή “ουράς” (tail recursion) και συνέχειες (continuations)

Σύντομη ιστορία της γλώσσας ML

- Robin Milner (ACM Turing Award)
- Logic for Computable Functions
  - Stanford 1970-1971
  - Edinburgh 1972-1995
  - Cambridge 1996-2010
- Μεταγλώσσα του συστήματος LCF
  - Απόδειξη θεωρημάτων (theorem proving)
  - Σύστημα τύπων (type system)
  - Συναρτήσεις υψηλής τάξης (higher-order functions)



- Θα χρησιμοποιήσουμε την υλοποίηση SML/NJ (Standard ML of New Jersey)

Η γλώσσα ML μέσα από παραδείγματα

```
% sml

Standard ML of New Jersey, v110.XX
- 42;
val it = 42 : int
- 2 + 3;
val it = 5 : int
- fun square x = x * x;
val square = fn : int -> int
- square 5;
val it = 25 : int
- square;
val it = fun : int -> int
```

Βασικοί τύποι της ML

- Booleans
  - **`true, false : bool`**
- Ακέραιοι και τελεστές τους
  - **`0, 1, 2, … : int`**
  - **`+, -, *, mod, div, ~`** (μοναδιαίο μείον)
- Συμβολοσειρές και τελεστές τους
  - **`"Robin Milner" : string`**
  - **`^`** (συνένωση συμβολοσειρών)
- Αριθμοί κινητής υποδιαστολής και τελεστές τους
  - **`1.0, 2.56, 3.14159`**, …
  - **`+, -, *, /, ~`**

Οι τελεστές είναι αριστερά προσεταιριστικοί, με προτεραιότητες {**+**,**-**} < {*****,**/**,**div**,**mod**} < {**~**}.

Η γλώσσα ML μέσα από παραδείγματα

```
- 1 = 2;
val it = false : bool
- 1 <> 2 andalso true <> false;
val it = true : bool
- true = false orelse 1 <= 2;
val it = true : bool
- "Robin" > "Milner";
val it = true : bool
- 2.56 < 3.14;
val it = true : bool
- 2.56 = 3.14;
stdIn: Error: operator and operand don't agree
  operator domain: ''Z * ''Z
  operand:         real * real
```

Υπερφόρτωση τελεστών (operator overloading)

```
- 6 * 7
val it = 42 : int
- 6.0 * 7.0;
val it = 42.0 : real
- 2.0 * 21;
stdIn: Error: operator and operand don't agree
  operator domain: real * real
  operand:         real * int
  in expression:   2.0 * 21
```

- Ο τελεστής * (και άλλοι όπως ο +) είναι **υπερφορτωμένοι**
- Έχουν διαφορετική ερμηνεία σε ζεύγη ακεραίων και διαφορετική σε ζεύγη αριθμών κινητής υποδιαστολής
- Η ML δεν κάνει αυτόματη μετατροπή από ακεραίους σε πραγματικούς αριθμούς (όπως π.χ. κάνει η C)

Η γλώσσα ML μέσα από παραδείγματα

```
- fun max a b =
=   if a > b then a else b;
val max = fn : int -> int -> int
- max 17 5;
val it = 17 : int
- max 10 42;
val it = 42 : int
```

- Προσέξτε τον περίεργο τύπο

  `int -> int -> int`

- Λέει ότι η **`max`** είναι μια συνάρτηση που παίρνει έναν ακέραιο και επιστρέφει μια συνάρτηση που παίρνει έναν ακέραιο και επιστρέφει έναν ακέραιο

Currying

- Οι συναρτήσεις είναι αντικείμενα πρώτης τάξης τα οποία μπορούμε να τα διαχειριστούμε όπως όλα τα άλλα αντικείμενα (π.χ. τους ακεραίους)

Haskell B. Curry

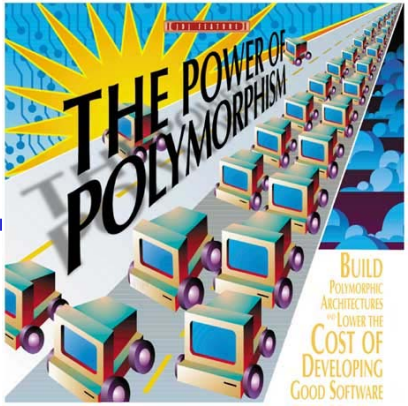
```
- fun max a b = if a > b then a else b;
val max = fn : int -> int -> int
- val max_five = max 5;
val max_five = fn : int -> int
- max_five 42;
val it = 42 : int
- max_five 3;
val it = 5 : int
```

Currying vs. Tuples

- Αν θέλουμε, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πλειάδες (tuples) ως ορίσματα ή αποτελέσματα συναρτήσεων

```
- fun max (a,b) = if a > b then a else b;
val max = fn : int * int -> int
- max (17,42);
val it = 42 : int
- fun reverse (a,b) = (b,a);
val reverse = fn : 'a * 'b -> 'b * 'a
- reverse (17,42);
val it = (42,17) : int * int
- max (reverse (17,42));
val it = 42 : int
```

Πολυμορφισμός



- Η συνάρτηση **reverse** έχει έναν ενδιαφέροντα τύπο

```
- fun reverse (a,b) = (b,a);
val reverse = fn : 'a * 'b -> 'b * 'a
```

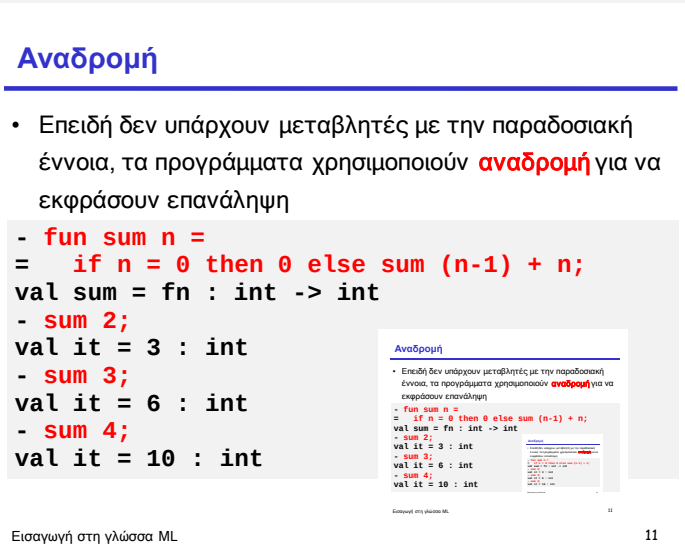
- Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να αντιστρέψουμε μια δυάδα όπου το πρώτο όρισμα είναι οποιουδήποτε τύπου και το δεύτερο όρισμα επίσης είναι οποιουδήποτε τύπου

```
- reverse (42,3.14);
val it = (3.14,42) : real * int
- reverse ("foo",(1,2));
val it = ((1,2),"foo") : (int * int) * string
```

Αναδρομή

- Επειδή δεν υπάρχουν μεταβλητές με την παραδοσιακή έννοια, τα προγράμματα χρησιμοποιούν **αναδρομή** για να εκφράσουν επανάληψη

```
- fun sum n =
=   if n = 0 then 0 else sum (n-1) + n;
val sum = fn : int -> int
- sum 2;
val it = 3 : int
- sum 3;
val it = 6 : int
- sum 4;
val it = 10 : int
```



Τελεστής ύψωσης σε δύναμη

- Μπορούμε επίσης να ορίσουμε νέους αριθμητικούς τελεστές ως συναρτήσεις

```
- fun x ^ y =
=    if y = 0 then 1
=    else x * (x ^ (y-1));
val ^ = fn : int * int -> int
- 2 ^ 2;
val it = 4 : int
- 2 ^ 3;
val it = 8 : int
- 2 ^ 4;
val it = 16 : int
```

Επαναχρησιμοποίηση αποτελεσμάτων

- Επειδή δεν έχουμε μεταβλητές, είμαστε αναγκασμένοι να επαναλάβουμε εκφράσεις (και υπολογισμούς)

```
fun f x =
  g(square(max(x,4))) +
     (if x < 1 then 1
               else g(square(max(x,4))));
```

- Μια μέθοδος για να γράψουμε πιο εύκολα την παραπάνω συνάρτηση είναι με χρήση μιας βοηθητικής συνάρτησης

```
fun f1(a,b) = b + (if a < 1 then 1 else b)
fun f x = f1(x, g(square(max(x,4))));
```

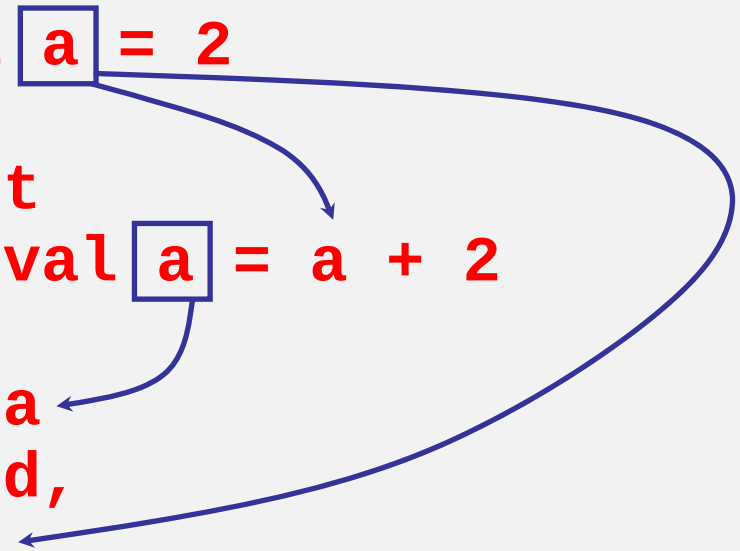
Η έκφραση let

- Ένας πιο εύκολος τρόπος είναι ο ορισμός ενός τοπικού ονόματος για την επαναχρησιμοποιούμενη έκφραση

```
fun f x =
  let
    val gg = g(square(max(x,4)))
  in
    gg + (if x < 1 then 1 else gg)
  end;
```

Η έκφραση let δεν είναι ανάθεση

```
- let
=   val a = 2
= in
=   (let
=      val a = a + 2
=    in
=      a
=    end,
=    a)
= end;
val it = (4,2) : int * int
```



Σύνθετοι τύποι δεδομένων στην ML

- Προγράμματα που επεξεργάζονται μόνο βαθμωτά δεδομένα (scalars – χωρίς δομή) δεν είναι πολύ χρήσιμα
- Οι συναρτησιακές γλώσσες προγραμματισμού είναι ό,τι πρέπει για την επεξεργασία σύνθετων τύπων δεδομένων
- Έχουμε ήδη δει **πλειάδες**, που είναι σύνθετοι τύποι δεδομένων για την αναπαράσταση ενός ορισμένου αριθμού αντικειμένων (πιθανώς διαφορετικών τύπων)
- Η ML έχει επίσης **λίστες**, που είναι σειρές οποιουδήποτε αριθμού αντικειμένων του ίδιου όμως τύπου

Λίστες

- Οι πλειάδες περικλείονται από παρενθέσεις,
  οι λίστες από αγκύλες

```
- (1,2);
val it = (1,2) : int * int
- [1,2];
val it = [1,2] : int list
```

- Ο τελεστής @ συνενώνει δύο λίστες

```
- [1,2] @ [3,4];
val it = [1,2,3,4] : int list
```

Cons

- Μπορούμε να προσθέσουμε στοιχεία στην αρχή μιας λίστας με τον τελεστή `::` (προφέρεται cons)

```
- 1 :: 2 :: 3 :: [];
val it = [1,2,3] : int list
- 0 :: it;
val it = [0,1,2,3] : int list
```

- Η συνένωση δύο λιστών δεν είναι το ίδιο με τη χρήση `::`

```
- [1,2] :: [3,4];
stdIn: Error: operator and operand don't agree
  operator domain: int list * int list list
  operand:         int list * int list
  in expression:
     (1 :: 2 :: nil) :: 3 :: 4 :: nil
```

Άλλες συναρτήσεις για λίστες

```
- null [];
val it = true : bool
- null [1,2];
val it = false : bool
- val l = [1,2,3,4];
val l = [1,2,3,4] : int list
- hd l;
val it = 1 : int
- tl l;
val it = [2,3,4] : int list
- length l;
val it = 4 : int
- nil;
val it = [] : 'a list
```

Ορισμός συναρτήσεων για λίστες

```
- fun addto (l,v) =
=   if null l then nil
=   else hd l + v :: addto (tl l,v);
val addto = fn : int list * int -> int list
-
-
- addto ([1,2,3],2);
val it = [3,4,5] : int list
- addto ([1,2,3],~2);
val it = [~1,0,1] : int list
```

Ορισμός συναρτήσεων για λίστες

```
- fun map (f, l) =
=   if null l then nil
=   else f (hd l) :: map (f, tl l);
val map = fn : ('a -> 'b) * 'a list -> 'b list
-
-
- fun add2 x = x + 2;
val add2 = fn : int -> int
- map (add2, [10,11,12]);
val it = [12,13,14] : int list
```

Ανώνυμες συναρτήσεις (λ-εκφράσεις)

```
- map (fn x => x + 2, [10,11,12]);
val it = [12,13,14] : int list
```

- Το πρώτο όρισμα της παραπάνω συνάρτησης λέγεται **λάμβδα έκφραση**: είναι μια συνάρτηση χωρίς όνομα

- Ο τελεστής **fun** είναι ισοδύναμος με μία λάμβδα έκφραση

```
- val add2 = fn x => x + 2;
val add2 = fn : int -> int
- add2 10;
val it = 12 : int
```

Αναδρομικές λάμδα εκφράσεις

- Πώς καλούμε αναδρομικά κάτι το οποίο δεν έχει όνομα;
- Του δίνουμε ένα!

```
- let
=   val rec f =
=     fn x => if null x then nil
=             else (hd x + 3) :: f (tl x)
= in
=   f
= end
= [1,2,3,4];
val it = [4,5,6,7] : int list
```

Ταίριασμα προτύπων (pattern matching)

- Στα μαθηματικά, οι συναρτήσεις πολλές φορές ορίζονται με διαφορετικές εκφράσεις βάση κάποιων συνθηκών

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{εάν } x \geq 0 \\ -x & \text{εάν } x < 0 \end{cases}$$

- Οι συναρτήσεις της ML δε διαφέρουν και επιτρέπουν τον ορισμό κατά περιπτώσεις και την αποφυγή της χρήσης **`if`**

```
fun map (f,[]) = []
  | map (f,l) = f (hd l) :: map (f,tl l);
```

- Όμως, ο ορισμός ανά περιπτώσεις είναι ευαίσθητος ως προς τη σειρά εμφάνισης των συναρτησιακών προτάσεων

```
fun map (f,l) = f (hd l) :: map (f,tl l)
  | map (f,[]) = [];
```

Καλύτερος ορισμός μέσω ταιριάσματος προτύπων

- Το πρότυπο _ ταιριάζει με όλα τα αντικείμενα
- Το πρότυπο **h :: t** ταιριάζει με μια λίστα και δένει
  - τη μεταβλητή **h** με την κεφαλή της λίστας και
  - τη μεταβλητή **t** με την ουρά της λίστας

```
fun map (_, []) = []
  | map (f, h::t) = f h :: map (f, t);
```

Χρήση σταθερών ως πρότυπα

```
- fun is_zero 0 = "yes";
stdIn: Warning: match nonexhaustive
          0 => ...
val is_zero = fn : int -> string
- is_zero 0;
val it = "yes" : string
```

- Κάθε σταθερά ενός τύπου που υποστηρίζει ισότητα μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως πρότυπο
- Αλλά δεν μπορούμε να γράψουμε

```
fun is_zero 0.0 = "yes";
```

Μη εξαντλητικό ταίριασμα προτύπων

- Στο προηγούμενο παράδειγμα, ο τύπος της **`is_zero`** ήταν **`int -> string`**, αλλά ταυτόχρονα υπήρξε η προειδοποίηση "**`Warning: match nonexhaustive`**"
- Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση ορίστηκε με πρότυπα που δεν εξάντλησαν το πεδίο ορισμού της συνάρτησης
- Κατά συνέπεια, είναι δυνατό να υπάρχουν προβλήματα χρόνου εκτέλεσης, όπως:

```
- is_zero 42;
uncaught exception Match: [nonexhaustive
                           match failure]
  raised at ...
```

Κανόνες ταιριάσματος προτύπων στην ML

- Το πρότυπο _ ταιριάζει με οτιδήποτε
- Μια μεταβλητή είναι ένα πρότυπο που ταιριάζει με οποιαδήποτε τιμή και δένει τη μεταβλητή με την τιμή
- Μια σταθερά (ενός τύπου ισότητας) είναι ένα πρότυπο που ταιριάζει μόνο με τη συγκεκριμένη σταθερά
- Μια πλειάδα **`(x,y,…,z)`** είναι ένα πρότυπο που ταιριάζει με κάθε πλειάδα του ίδιου μεγέθους, της οποίας τα περιεχόμενα ταιριάζουν με τη σειρά τους με τα **`x,y,…,z`**
- Μια λίστα **`[x,y,…,z]`** είναι ένα πρότυπο που ταιριάζει με κάθε λίστα του ίδιου μήκους, της οποίας τα στοιχεία ταιριάζουν με τη σειρά τους με τα **`x,y,…,z`**
- Ένα cons **`h::t`** είναι ένα πρότυπο που ταιριάζει με κάθε μη κενή λίστα, της οποίας η κεφαλή ταιριάζει με το **`h`** και η ουρά με το **`t`**

Παράδειγμα χρήσης ταιριάσματος προτύπων

- Παραγοντικό με χρήση **`if-then-else`**

```
fun fact n =
  if n = 0 then 1 else n * fact (n-1);
```

- Παραγοντικό με χρήση ταιριάσματος προτύπων

```
fun fact 0 = 1
  | fact n = n * fact (n-1);
```

- Παρατηρήστε ότι υπάρχει επικάλυψη στα πρότυπα
- Η εκτέλεση δοκιμάζει πρότυπα με τη σειρά που αυτά εμφανίζονται (από πάνω προς τα κάτω)

Άλλα παραδείγματα

- Η παρακάτω δομή είναι πολύ συνηθισμένη σε αναδρομικές συναρτήσεις που επεξεργάζονται λίστες: μία περίπτωση για την κενή λίστα (**`nil`**) και (τουλάχιστον) μία περίπτωση για όταν η λίστα δεν είναι κενή (**`h::t`**).
- Άθροισμα όλων των στοιχείων μιας λίστας

```
fun sum nil = 0
  | sum (h::t) = h + sum t;
```

- Αριθμός των στοιχείων μιας λίστας με κάποια ιδιότητα

```
fun ctrue nil = 0
  | ctrue (true::t) = 1 + ctrue t
  | ctrue (false::t) = ctrue t;
```

Ένας περιορισμός: γραμμικά πρότυπα

- Δεν επιτρέπεται η χρήση της ίδιας μεταβλητής περισσότερες από μία φορές στο ίδιο πρότυπο

- Για παράδειγμα, το παρακάτω δεν επιτρέπεται:

```
fun f (a,a) = … for pairs of equal elements
  | f (a,b) = … for pairs of unequal elements
```

- Αντί αυτού πρέπει να χρησιμοποιηθεί το παρακάτω:

```
fun f (a,b) =
  if a = b then … for pairs of equal elements
           else … for pairs of unequal elements
```

Συνδυασμός προτύπων και let

```
fun halve nil = (nil, nil)
  | halve [a] = ([a], nil)
  | halve (a::b::cs) =
      let
        val (x, y) = halve cs
      in
        (a::x, b::y)
      end;
```

- Με τη χρήση προτύπων στους ορισμούς ενός **`let`**, μπορούμε να “αποσυνθέσουμε” εύκολα ένα αποτέλεσμα
- Η παραπάνω συνάρτηση παίρνει ως όρισμα μια λίστα και επιστρέφει ένα ζεύγος από λίστες, η κάθε μία από τις οποίες έχει τα μισά στοιχεία της αρχικής λίστας

Χρήση της συνάρτησης halve

```
- fun halve nil = (nil, nil)
=   | halve [a] = ([a], nil)
=   | halve (a::b::cs) =
=       let
=         val (x, y) = halve cs
=       in
=         (a::x, b::y)
=       end;
val halve = fn : 'a list -> 'a list * 'a list
- halve [1];
val it = ([1],[]) : int list * int list
- halve [1,2];
val it = ([1],[2]) : int list * int list
- halve [1,2,3,4,5,6];
val it = ([1,3,5],[2,4,6]) : int list * int list
```

Ένα μεγαλύτερο παράδειγμα: Merge Sort

- Η συνάρτηση **`halve`** διανείμει τα στοιχεία μιας λίστας σε δύο περίπου ίσα κομμάτια
- Είναι το πρώτο βήμα για ταξινόμηση συγχώνευσης
- Η συνάρτηση **`merge`** συγχωνεύει δύο ταξινομημένες λίστες

```
- fun merge (nil, ys) = ys
=   | merge (xs, nil) = xs
=   | merge (x::xs, y::ys) =
=       if x < y then x :: merge (xs, y::ys)
=                 else y :: merge (x::xs, ys);
val merge = fn : int list * int list -> int list
- merge ([2],[1,3]);
val it = [1,2,3] : int list
- merge ([1,3,4,7,8],[2,3,5,6,10]);
val it = [1,2,3,3,4,5,6,7,8,10] : int list
```

Η συνάρτηση Merge Sort

```
fun mergeSort nil = nil
  | mergeSort [a] = [a]
  | mergeSort theList =
      let
        val (x, y) = halve theList
      in
        merge (mergeSort x, mergeSort y)
      end;
```

Ο τύπος της παραπάνω συνάρτησης είναι

```
int list -> int list
```

λόγω του τύπου της συνάρτησης **`merge`**

Παράδειγμα χρήσης της Merge Sort

```
- fun mergeSort nil = nil
=   | mergeSort [a] = [a]
=   | mergeSort theList =
=       let
=         val (x, y) = halve theList
=       in
=         merge (mergeSort x, mergeSort y)
=       end;
val mergeSort = fn : int list -> int list
- mergeSort [4,3,2,1];
val it = [1,2,3,4] : int list
- mergeSort [4,2,3,1,5,3,6];
val it = [1,2,3,3,4,5,6] : int list
```

Φωλιασμένοι ορισμοί συναρτήσεων

- Μπορούμε να ορίσουμε τοπικές συναρτήσεις, ακριβώς όπως ορίζουμε τοπικές μεταβλητές, με χρήση **`let`**
- Συνήθως αυτό γίνεται για βοηθητικές συναρτήσεις που δε θεωρούνται χρήσιμες από μόνες τους
- Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να κρύψουμε τις συναρτήσεις **`halve`** και **`merge`** από το υπόλοιπο πρόγραμμα
- Αυτό έχει και το πλεονέκτημα ότι οι εσωτερικές συναρτήσεις μπορούν να αναφέρονται σε μεταβλητές των εξωτερικών συναρτήσεων

```
(* Sort a list of integers. *)
fun mergeSort nil = nil
  | mergeSort [e] = [e]
  | mergeSort theList =
      let
        (* From the given list make a pair of lists
         * (x,y), where half the elements of the
         * original are in x and half are in y. *)
        fun halve nil = (nil, nil)
          | halve [a] = ([a], nil)
          | halve (a::b::cs) =
              let
                val (x, y) = halve cs
              in
                (a::x, b::y)
              end;

        (* Merge two sorted lists of integers into
         * a single sorted list. *)
        fun merge (nil, ys) = ys
          | merge (xs, nil) = xs
          | merge (x::xs, y::ys) =
              if x < y then x :: merge(xs, y::ys)
                       else y :: merge(x::xs, ys);

        val (x, y) = halve theList
      in
        merge (mergeSort x, mergeSort y)
      end;
```

Ανακεφαλαίωση της γλώσσας ML

- Βασικοί τύποι της ML: **`int`**, **`real`**, **`bool`**, **`char`**, **`string`**
- Τελεστές: **`~`**, **`+`**, **`-`**, **`*`**, **`div`**, **`mod`**, **`/`**, **`^`**, **`::`**, @, **`<`**, **`>`**, **`<=`**, **`>=`**, **`=`**, **`<>`**, **`not`**, **`andalso`**, **`orelse`**
- Επιλογή μεταξύ δύο: **`if … then … else`**
- Ορισμός συναρτήσεων: **`fun`**, **`fn =>`** και τιμών: **`val`**, **`let`**
- Κατασκευή πλειάδων: **`(x,y,…,z)`**
- Κατασκευή λιστών: **`[x,y,…,z]`**, ::, @
- Κατασκευαστές τύπων: **`*`**, **`list`**, και **`->`**
- Ταίριασμα προτύπων
- Φωλιασμένες συναρτήσεις